

# 高次結合化逆関数遅延神経回路による汎用組合せ最適化問題の解探索システムに関する研究

著者	曾田 尚宏
学位授与機関	Tohoku University
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/54369">http://hdl.handle.net/10097/54369</a>

博士学位論文

高次結合化逆関数遅延神経回路による  
汎用組合せ最適化問題の  
解探索システムに関する研究

曾田 尚宏

東北大学大学院  
情報科学研究科 応用情報科学専攻  
博士後期前期 3 年

平成 24 年 1 月 20 日



# 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
1.1	組み合わせ最適化問題とニューラルネットワークによる解探索	1
1.2	逆関数遅延ネットワークによる組み合わせ最適化問題の解探索	2
1.3	研究の目的	3
<b>2</b>	<b>逆関数遅延ネットワークによる最適化問題解探索</b>	<b>5</b>
2.1	神経細胞網による情報処理	5
2.2	ニューロンモデルとニューラルネットワーク	6
2.2.1	Hopfield モデルとネットワーク	7
2.2.2	極小値問題とその解決手法	9
2.3	逆関数遅延ネットワーク	10
2.3.1	負性抵抗と $g$ 関数	10
2.3.2	エネルギー関数	12
2.4	ニューラルネットワークによる組み合わせ最適化問題解探索	13
2.4.1	組合せ最適化問題と近似アルゴリズム	13
2.4.2	ニューラルネットワークによる解探索	14
2.4.3	本研究で扱う組み合わせ最適化問題の例	16
2.4.4	ID ネットワークによる組合せ最適化問題解探索	18
2.4.5	高次結合を導入した Hopfield ネットワークによる TSP 解探索	19
2.5	ID ネットワークのハードウェアへの実装	19
2.5.1	ストカスティック論理によるコーディングと演算	20
2.5.2	デジタル回路による ID ネットワークの実装	21
<b>3</b>	<b>高次結合逆関数遅延ネットワーク</b>	<b>23</b>
3.1	ID ネットワークへの高次結合の導入	23
3.1.1	エネルギー関数とネットワークの安定性	25
3.2	組合せ最適化問題解探索のための 4 次形式のエネルギー関数	26
3.2.1	HC-ID ネットワークへの導入	27
3.3	極小値状態を不安定化するのに必要な負性抵抗領域の見積もり	29
3.3.1	$\beta$ が有限な場合のエネルギー関数の傾きの見積もり	30

3.3.2	極小値状態の平衡点位置の見積もり	32
3.4	数値シミュレーションによる解探索性能の検証	34
3.4.1	極小値状態の平衡点位置	34
3.4.2	パラメータ $B/4C$ と出現する解状態の関係	36
3.4.3	ネットワーク状態の解探索中におけるカオス性	37
3.4.4	パラメータ $\alpha$ による解探索性能への影響	39
3.5	まとめ	39
4	高次結合ネットワークによる汎用解探索システム	41
4.1	HC-ID ネットワークの簡素化	41
4.1.1	離散時間モデルの導出	42
4.1.2	離散時間ネットワークの更新法	43
4.1.3	離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの導出	43
4.1.4	数値シミュレーションによる解探索性能の比較	44
4.2	学位審査会スケジューリング問題への適用	48
4.2.1	問題の定式化	49
4.2.2	ネットワーク構成	50
4.2.3	4 次形式のエネルギー関数の拡張	51
4.2.4	数値シミュレーションによる解探索結果	53
4.3	まとめ	54
5	ハードウェア設計	57
5.1	FPGA による実装に向けて	57
5.1.1	ニューロンユニットのブロックダイアグラム	58
5.1.2	実装に必要な FPGA リソースの見積もり	59
5.1.3	離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの構築	60
5.2	ストカスティック論理を導入した高次結合ネットワーク	60
5.2.1	離散時間 HC-ヒステリシスネットワークへのストカスティック論理の導入	61
5.2.2	エネルギー関数のパラメータ $A$ の再考	62
5.2.3	解探索性能の比較	62
5.2.4	ストカスティック論理を導入した場合のニューロン素子	64
5.3	まとめ	64
6	結論	67
付録 A	エネルギー関数のパラメータ $A$ の最適条件の導出	69
A.1	全ての非解状態を不安定化する条件	70
A.2	パラメータ $A$ 以外の影響を考慮した条件の導出	71

---

付録 B	4 次形式のエネルギー関数による荷重値行列の算出	73
付録 C	$\beta$ が有限値をとる場合のエネルギー関数の偏微分値の見積もり	77
	本研究に関する発表	83
	参考文献	85
	索引	88



# 1 はじめに

現在、我々の生活・社会を支える情報処理システムは、その多くが半導体で実装されたノイマン型の計算機である。これらの計算機は多量の情報を正確にかつ高速に処理することができ、現代社会において大きな役割を果たしている。ノイマン型計算機の特徴としては、

1. 明確なプログラムを与えられて情報処理を行う（設計依存型）
2. 処理は逐次的に行われる（逐次処理型）
3. 1つのプログラムにより全体の処理を管理する（集中制御型）

などが挙げられる。しかし一方で、ノイマン型計算機の限界も幾つか指摘されており [1]、

- 認識・判断・学習といった環境に応じて対応が必要な情報処理には向かない。
- 処理対象が膨大になると実時間での情報処理が困難になる。

などが挙げられている。

これに比べて、人間を含む生体の脳はより柔軟であり、概ね正確な処理を必要な時間内に安定して行うことができる。そこで生体の脳を数学的にモデル化し、これを基に情報処理システムを構築した物がニューラルネット型計算機である [1]。ニューラルネット型計算機の特徴としては、

1. 処理手順は自ら徐々に学習し獲得する（事例依存型）
2. 非常に多くの素子が独立して処理を行う（並列処理型）
3. 全体を管理する物は存在しない（分散制御型）

などが挙げられ、ノイマン型計算機が苦手とする情報処理をよりの確にこなせる可能性がある。そこで、我々は脳の神経回路網を基により柔軟で的確な処理を行える情報処理システム（脳型計算機）の実現を目指して研究を進めている。

## 1.1 組み合わせ最適化問題とニューラルネットワークによる解探索

ノイマン型計算機が不得意とする情報処理の1つに、組合せ最適化問題の解探索が挙げられる。組み合わせ最適化問題はある条件下での最適な並べ方や順序を求める問題であり、その応用は科学・工学・オペレーションズリサーチ・経済など至る所に現れる [2]。具体的には、



- スマートグリッド
- クラウドコンピューティングなどの分散処理における，タスク分配の最適化
- 物資輸送における，ルート最適化
- パケットルーティングの最適化
- 鉄道などの交通網の運行スケジュール最適化

などが挙げられ，最適解を得ることはコスト削減やエネルギー効率の向上などに大きく貢献する．しかしながら，その多くの問題は NP (Non-deterministic Polynomial time) クラスに属するため，問題の規模が大きくなると計算時間の爆発が起こる．このため，一般的にはノイマン型計算機を用いて実時間に解を得ることが難しい．そこで解探索時間の短縮を目指し様々な方法が研究されており，その中の一つが Hopfield ネットワークを用いた解探索法である．

Hopfield ネットワークは複数のニューロンモデルを相互結合させたネットワークである．結合の強さが無向性である (対称シナプス結合である) 場合，エネルギー関数と呼ばれる一種の Lyapunov 関数を定義でき，この関数の値が常に減少するようにネットワークの状態が変化していく．つまり，ネットワークのダイナミクスはエネルギー関数の勾配から受ける力による．これにより，関数の最小値状態を探索することが可能である．そこで，今求めたい組み合わせ最適化問題の最適解がこの極小値状態に対応するように 2 次形式のエネルギー関数を設計することで，組み合わせ最適化問題の解探索を行うことが出来る．この時の探索はアルゴリズム的な原理ではなく，力学的なダイナミクスによるため，問題サイズに依らず効率的に解を探索することが可能である．

しかしこの手法では，必ずしも最小値状態に到達することができず，エネルギー関数の極小値の状態で止まってしまう，極小値問題と呼ばれる大きな問題がある．そこで極小値問題を回避するために，非常に多くのニューロンモデルやニューラルネットワークが研究されている．例を挙げると，ニューロンモデルのダイナミクスを改良した物として，カオスニューラルネットワーク [3, 4]，ヒステリシスニューラルネットワーク [5]，逆関数遅延ネットワーク [6]，バースト逆関数遅延ネットワーク [7] など，またネットワークの結合手法を改良した物としては非対称環状ニューラルネットワーク [8, 9] や高次シナプス結合を導入した高次 Hopfield ネットワーク [10] などがある．

## 1.2 逆関数遅延ネットワークによる組み合わせ最適化問題の解探索

ニューラルネット型計算機の一つとして，逆関数遅延 (Inverse function Delayed : ID) ネットワークが提案されている [6]．その特徴の一つは動作に実際の神経細胞で見られる自律的動作を取り入れたことであり，このようなダイナミクスを取り入れたシステムは他に例が無い．また (a) 組み合わせ最適化問題解探索，(b) 連想記憶，(c) 学習などに適用した場合，これらの処理能力が向上することが分かっている [11, 12, 13]．そこで本研究では ID ネットワークが有用な脳型計算機システムであると考え，これを用いたアプリケーションについて，組み合わせ最適化問題の解探索システムを中心に取り扱う．

これまでの研究により，ID ネットワークを組み合わせ最適化問題の解探索に適用すると幾つかの問題で最適解が得られることが分かっている．これは ID ネットワークの素子が自律的に発振し最適

解以外の出力を不安定化することで実現されており，特に N-Queen 問題や 4 色問題と呼ばれる問題では，ネットワークの出力が静止すれば 100% 正解が得られる．またこれらの問題では，最適解を得るための素子の自律性の設定法も明らかにされている [11]．一方，組み合わせ最適化問題の中でも比較の実用性が高い巡回セールスマン問題 (TSP) については，出力の動的な時間変化を解として読み取る，動的解表現と呼ばれる方法を用いることで最適解が得られている [14]．しかし，TSP については ID ネットワークの詳しい動作が分かっておらず，また TSP を内包する 2 次割当問題 (QAP) に適用できないという問題点があった．

### 1.3 研究の目的

---

本研究では ID ネットワークによる組み合わせ最適化問題の解探索システムを基に，より汎用的な組み合わせ最適化問題に適用できるような解探索システムを構築することを目指す．まず ID ネットワークに高次シナプス結合を導入し，TSP を始めとする種々の組み合わせ最適化問題においても N-Queen 問題などの場合と同様に静止状態で最適解のみが得られるようにする．高次シナプス結合はニューロン素子間の結合様式の一種であり，複数のニューロン素子の出力を掛け合わせて次の素子へと入力する多対 1 の結合である [10]．先行研究により，この高次シナプス結合を Hopfield ネットワークに取り入れることで，TSP に適用した場合に最適解とそれ以外の状態を分離できることが示されている [15]．しかし，Hopfield ネットワークでは状態が最適解以外の状態 (極小値状態) に陥った場合にこれを不安定化することができなかった．

そこで本研究では高次結合を持つ ID ネットワークを用いることで，ネットワークの自律的発振動作により最適解以外の状態を不安定化し，静止状態で最適解のみが得られるような解探索システムを導出する．また提案システムを TSP や QAP の解探索に適用するためのエネルギー関数を設計し，最適解を得るためのパラメータ設定を導出する．次に提案システムのより大規模な組合せ最適化問題への適用を目指す．まず先に導出した高次結合ネットワークを簡素化し，数値シミュレーションにおいて高速な解探索が可能なシステムに改良する．また，より現実的な解探索システム実現のために，導出したシステムのハードウェア実装に向けた研究を行う．さらに，より実用的な問題例として，スケジューリング問題の一種である学位論文審査会スケジューリング問題の解探索を取り上げ，エネルギー関数の拡張と問題の実装・解探索を行う．

本論文では 3 章で高次シナプス結合を導入した ID ネットワークの提案とエネルギー関数の設計を示した後，4 章で提案システムの簡素化とスケジューリング問題への適用について述べる．また 5 章ではシステムのハードウェア化に向けて，ニューロン素子を実現するブロックダイアグラムの設計やストカスティック論理の導入について述べる．最後に，6 章で本論文の結論を与える．



## 2 逆関数遅延ネットワークによる最適化問題解探索

本章では、本研究の基礎となる逆関数遅延ネットワークによる組合せ最適化問題解探索について述べる。まずニューラルネットワークによる組合せ最適化問題の解探索について述べた後、逆関数遅延ネットワークの基本式とダイナミクスを示す。また逆関数遅延ネットワークによる組合せ最適化問題の解探索についてその利点と問題点を挙げる。

### 2.1 神経細胞網による情報処理

生体での情報処理において、中心的な役割を果たしていると考えられるのが神経細胞である。図 2.1 に一般的な神経細胞の模式図を示す [16]。神経細胞は大きく分けて、樹状突起、細胞体、軸索の 3 つで構成されている。樹状突起は他の複数の神経細胞の軸索終末と結合している部位である。結合部はシナプス結合と呼ばれ、このシナプス結合を介して他の神経細胞からスパイク（活動電位）が伝えられる。スパイクとは細胞内の電位が細胞外に比べて高くなっている状態である。通常細胞内の電位は細胞外に比べ低く保たれている（静止電位）が、外部から刺激を受けることでスパイクが生成される。脳内ではこのスパイクによって情報を符号化していると考えられ、他の神経細胞から伝えられたスパイクは樹状突起を通して細胞体へと送られる。細胞体では受け取ったスパイクの電位差を足し合わせ、それが閾値を超えると次の神経細胞へ伝えるスパイクを生成する。生成されたスパイクは軸

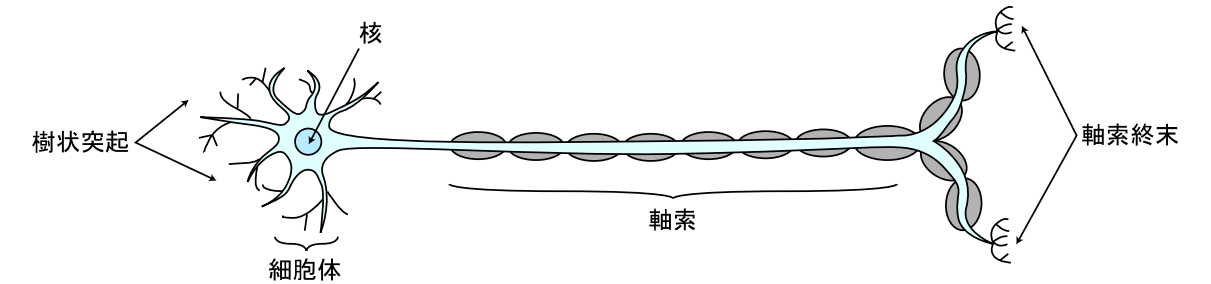


図 2.1 神経細胞

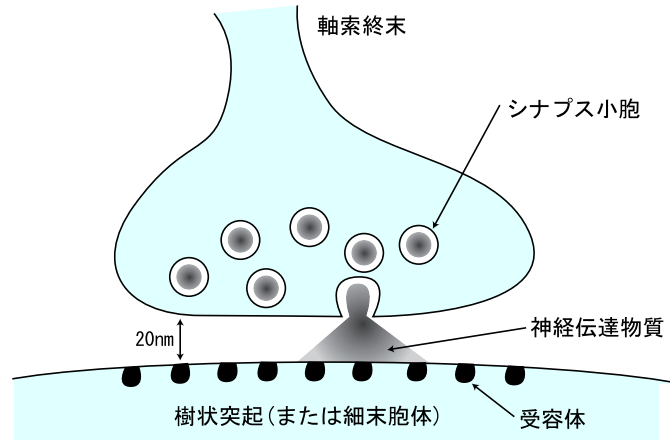


図 2.2 化学シナプス

索を通して軸索終末まで伝えられ、再びシナプス結合を介して次の神経細胞へと伝えられる。これらの動作から、神経細胞は複数の入力を受け取り、演算をして結果を出力する素子であると捉えることができる。

次に、シナプス結合について細かく見てみる。シナプスでは軸索終末と樹状突起の間に微小な（数～数十 nm）隙間があり、シナプスの前後の神経細胞を分離している。またシナプス結合には化学シナプスと電気シナプスの 2 種類があるが、シナプスの多数は化学シナプスである。化学シナプスでは、軸索終末にスパイクが到達すると、シナプス小胞から神経伝達物質が放出される（図 2.2）。この時放出される物質の種類によって、情報伝達のされ方が変化する。一方、樹状突起には神経伝達物質を受け取る受容体と呼ばれる小器官が並んでいる。この受容体が神経伝達物質を受け取ると、受け取った物質に応じて細胞内と細胞外の電位差を変化させる。これによって、信号が前の神経細胞から後ろの細胞へと伝えられるのである。化学シナプスでは、スパイクが到達した時に神経伝達物質が放出されるかどうかは確率的である。また、神経伝達物質の種類や受容体の量によって、後ろの神経細胞が受け取る信号は変化する。このことから、シナプスにおいても単に信号の伝達のみでなく、情報処理が行われていると考えられる。

## 2.2 ニューロンモデルとニューラルネットワーク

ニューロンモデルは生体の神経細胞をモデル化したものであり、その導出法としては 2 種類が考えられる。1 つは実際の神経細胞の振る舞いを忠実に再現するモデルを作ること、神経回路で行われている情報処理を解明しようとする手法である。この手法の例としては、Hodgkin-Huxley 方程式 [17] が有名である。このモデルは神経細胞の内外でのイオンの流れを元に作られており、その挙動は生体の神経細胞とよく一致するが、一方でモデル内の自由変数は 4 つ存在するため、モデルを解析的に扱うことが難しい。そこで Hodgkin-Huxley 方程式を簡略化したモデルとして、自由変数を 2 変数まで減次した Fitzhugh-Nagumo 方程式 [18, 19] などが提案されている。

2 つ目の手法は神経細胞を多入力-出力の素子とみなしてモデル化する手法である。1 個 1 個の

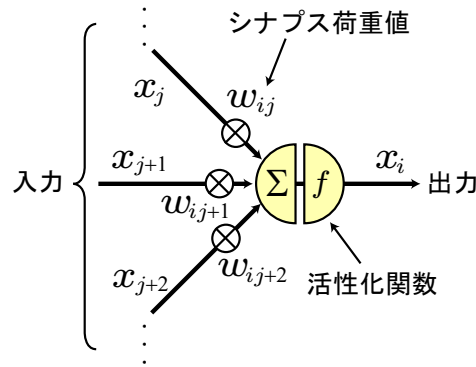


図 2.3 Hopfield モデルの模式図．他のニューロンからの入力荷重値を掛けられ，全て足し合わされる．これがニューロンに対する外部入力となる．

ニューロンモデルについては比較的単純なダイナミクスで動作するが，このモデルを多数つなげてネットワークを構成することで神経回路のように複雑な情報処理を行うことができる．この手法でモデル化されたモデルの代表としては，Hopfield モデルなどがある．次節では Hopfield モデルと，そのネットワークを用いた情報処理について取り上げる．

### 2.2.1 Hopfield モデルとネットワーク

Hopfield はニューロンモデルの一種として，図 2.3 のようなモデルを提案した [20]．このモデルは以下のような数式で表される．

$$\tau \frac{du_i}{dt} = \sum_j w_{ij} x_j + h_i - u_i \quad (2.1)$$

$$x_i = f(u_i) \quad (2.2)$$

ここで  $h_i, u_i, x_i$  はそれぞれ  $i$  番目のニューロンのバイアス値，内部状態，出力を表し， $w_{ij}$  はニューロン  $j$  から  $i$  への結合の荷重値を表している． $\tau$  は時定数である．また  $f(u)$  は活性化関数と呼ばれる関数で，以下のようなシグモイド型の関数が用いられる．

$$f(u_i) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{\beta}{2} u_i \right) \right) \quad (2.3)$$

ここで  $\beta$  は関数のゲインを調整するパラメータであり， $\beta$  が大きいほど  $f(u)$  のゲインは大きくなる (図 2.4)．また式 (2.3) を出力関数とした場合，ニューロンの出力は 0 から 1 の間の値を取る．

この Hopfield モデルを複数つなげたネットワークが Hopfield ネットワークである．Hopfield ネットワークでは，荷重値が対称な場合 ( $w_{ij} = w_{ji}$ ) エネルギー関数と呼ばれる一種の Lyapunov 関数を定義することができる．

$$E_{\text{HNN}} = \sum_i \sum_j w_{ij} x_i x_j - \sum_i h_i x_i + \sum_i \int_{\frac{1}{2}}^{x_i} f^{-1}(x) dx \quad (2.4)$$

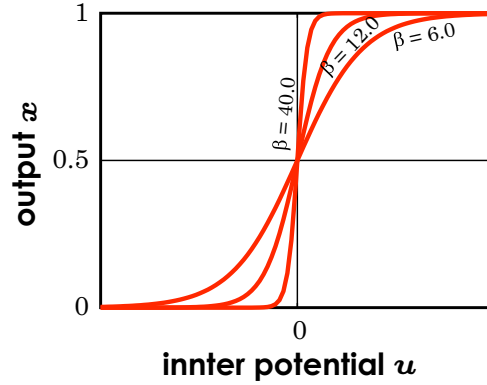


図 2.4 シグモイド型の出力関数． $\beta$  が大きいほど関数のゲインは大きくなる．

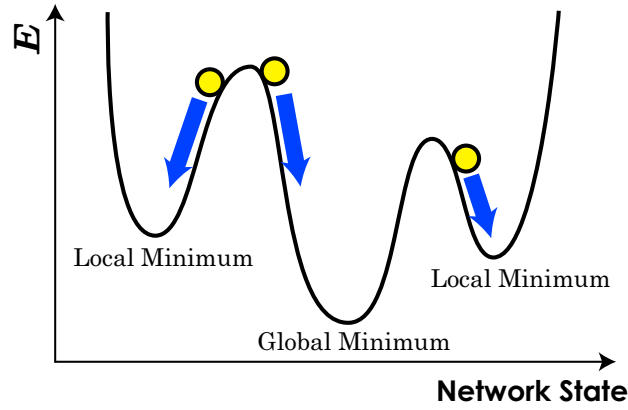


図 2.5 Hopfield ネットワークの最小値状態探索のイメージ．ネットワークの最終状態が最小値状態に辿り着くか極小値状態で留まるかは，ネットワークの初期状態によって決まる．

さらにこのエネルギー関数の時間微分を取ると，

$$\frac{dE_{\text{HNN}}}{dt} = - \sum_i \tau \frac{df(u_i)}{dt} \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2 \quad (2.5)$$

となる．よって式 (2.5) より，Hopfield ネットワークの状態は常にエネルギー関数の値が減少する方向にのみ更新されることが分かる．つまり，ネットワーク状態はエネルギー関数  $E_{\text{HNN}}$  の勾配から力を受けて，状態が更新されると考えられる (図 2.5)．これにより，Hopfield ネットワークは  $E_{\text{HNN}}$  中に存在する最小値状態を探索することができる．またこの最小値状態探索はアルゴリズム的な手法ではなく，力学的なダイナミクスによるものであることが特徴的である．これにより，Hopfield ネットワークを用いることで組み合わせ最適化問題の解探索や連想記憶などの情報処理を行うことができる．本研究では，エネルギー関数を用いた組合せ最適化問題の解探索について取り扱う．

### 2.2.2 極小値問題とその解決手法

Hopfield ネットワークではエネルギー関数  $E_{\text{HNN}}$  の勾配に沿って最小値状態を探索する．ところが  $E_{\text{HNN}}$  の中に局在的な極値点 (極小値状態) が存在した場合，大局的な最小値点 (最小値状態) へと到達できず，ネットワーク状態が極小値状態で止まってしまうことがある．この問題を極小値問題と呼ぶ．極小値状態でネットワーク状態が止まってしまうと，Hopfield ネットワークではこの状態から抜け出せない．また極小値状態で止まってしまうか，最小値状態まで到達できるかはネットワークの初期状態に依存している．

そこでこの極小値問題を解決，あるいは回避するために，非常に多くのニューラルネットワークが研究されている．その中でも，ここでは 2 つのネットワークモデルを紹介する．

#### カオスニューラルネットワーク

カオスニューラルネットワーク (Chaotic neural network)[3] は，ダイナミクス中にカオス的な振る舞いを含むニューラルネットワークである．カオスニューラルネットワークを組み合わせ最適化問題の解探索に用いた場合，カオス的なダイナミクスによってネットワーク状態が不安定化されるため，極小値状態でネットワーク状態が止まることがなく，解探索を行うことが出来る．しかし，カオス的なダイナミクスによる不安定化は最小値状態でも働くため，ネットワーク状態は最小値状態でも静止できない．したがって最小値状態でネットワーク状態を静止させるためには，カオス的なダイナミクスのコントロールが必要となる．

カオスダイナミクスの制御法としては，“transiently chaotic neural network” と呼ばれるモデルが提案されている [4]．このモデルでは，カオス的なダイナミクスを時間に対して指数関数的に減衰させる．これにより，最初はカオス的なダイナミクスが支配的であるが，時間がたつにつれてエネルギー関数の勾配から受ける力によるダイナミクスが支配的になり，最終的にはエネルギー関数の極値でネットワーク状態が静止する．この時，カオス的なダイナミクスを十分にゆっくりと減衰させることで，ネットワーク状態を最小値状態で静止させることができる．しかしこの方法でも，他のアニーリングを用いた手法と同様に，演算時間と正解率に相反の関係がある．つまり，最小値状態を得るためには演算時間を長く取ってカオス的なダイナミクスをゆっくりと減衰させる必要があり，また演算時間を短くしてカオス的なダイナミクスを素早く減衰させてしまうと極小値状態でネットワーク状態が静止してしまう可能性がある．

#### 逆関数遅延ネットワーク

逆関数遅延ネットワーク (Inversed function Delayed network: ID network) は Hopfield ネットワークの出力に時間遅れの影響を追加し，また出力関数として Hopfield ネットワークで使われる出力関数の逆関数を含む関数を用いたニューラルネットワークである．出力関数を変化させることで，ダイナミクス中に負性抵抗の効果を持たせることが出来る．さらに ID ネットワークにおいても，Hopfield ネットワークと同様にエネルギー関数を定義することが可能で，エネルギー関数の勾配に沿ったダイナミクスが実現される．一方で ID モデル自体は，変数変換によって BVP 方程式に変換



できる．BVP 方程式は FitzHugh-Nagumo 方程式と等価であるため，ID モデルは生体の神経細胞ともつながりを持ったネットワークモデルであると言える．ID ネットワークの大きな特徴の一つは負性抵抗の効果が生じる領域をパラメータによって設定できることである．これによって，負性抵抗の生じる領域を適切に設定すれば，極小値状態のみを不安定化することが可能になる．

本研究では，ID ネットワークの負性抵抗のダイナミクスを組み合わせ最適化問題の解探索に有利なダイナミクスと考え，ID ネットワークを用いた組み合わせ最適化問題解探索について取り扱う．

## 2.3 逆関数遅延ネットワーク

本節では，ID ネットワークの基本ダイナミクスと負性抵抗について述べる．ID ネットワークの各素子は以下の微分方程式により更新される．

$$\tau_u \frac{du_i}{dt} + u_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j + h_i \quad (2.6)$$

$$\tau_x \frac{dx_i}{dt} = u_i - g(x_i) \quad (2.7)$$

ここで  $N$  はネットワーク中のニューロンの個数を，また  $u_i, x_i$  はそれぞれニューロン  $i$  の内部状態と出力を表す ( $1 \leq i \leq N$ )．さらに  $w_{ij}$  はニューロン  $j$  から  $i$  へのシナプス結合の荷重値を， $h_i$  はニューロン  $i$  のバイアスを表す． $\tau_u, \tau_x$  はそれぞれ内部状態と出力に関する時定数で， $\tau_x \ll \tau_u$  とする．関数  $g(x)$  は Hopfield ネットワークの出力関数の逆関数  $f^{-1}(x)$  を含む関数であり，以後  $g$  関数と呼ぶ．なお  $g$  関数の具体的な数式は次節で示す．ここで式 (2.6)，(2.7) から  $u_i$  を消去すると，

$$\tau_x \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \eta(x_i) \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial U_{ID}}{\partial x_i} \quad (2.8)$$

が得られる．ただし  $\eta(x_i)$  は粘性抵抗係数， $U_{ID}$  はポテンシャルを表し，

$$\eta(x_i) = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i} + \frac{\tau_x}{\tau_u} \quad (2.9)$$

$$-\frac{\partial U_{ID}}{\partial x_i} = \frac{1}{\tau_u} \left( \sum_j w_{ij} x_j + h_i - g(x_i) \right) \quad (2.10)$$

となる．このことから，ID モデルのダイナミクスはポテンシャル  $U_{ID}$  中を粘性抵抗を受けて運動する粒子のダイナミクスと等価であることがわかる (図 2.6)．

### 2.3.1 負性抵抗と $g$ 関数

次に，ID モデルの負性抵抗のダイナミクスについて考える．式 (2.9) より，粘性抵抗係数  $\eta$  は  $g$  関数の傾きによって符号が変化することが分かる．このことから，ID モデルの負性抵抗のダイナミクスは  $g$  関数の傾きが負になる領域で生じる<sup>\*1</sup>．これより， $g$  関数をコントロールすることで負性抵抗の効果をコントロールできるのである．

<sup>\*1</sup> 実際には  $\eta(x_i)$  には  $\tau_x/\tau_u$  の項が付加されているが， $\tau_x \ll \tau_u$  よりその効果を見捨てることのできる．

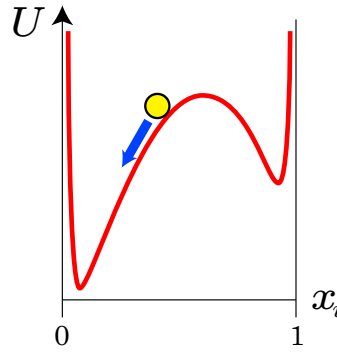


図 2.6 ID モデルのダイナミクスのイメージ．粒子の位置が ID モデルの状態に相当する．

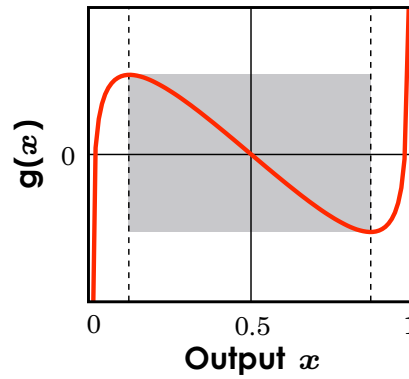


図 2.7 N 字型の  $g$  関数と負性抵抗領域．灰色で示した部分が負性抵抗領域に相当する．

具体的には， $g$  関数は以下の式で定義される．

$$g(x) = f^{-1}(x_i) - \alpha \left( x - \frac{1}{2} \right) \quad (2.11)$$

$$f^{-1}(x_i) = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) \quad (2.12)$$

ここで  $\alpha$  と  $\beta$  は正のパラメータであり， $\beta$  は  $f^{-1}$  関数のゲインを，また  $\alpha$  は  $g$  関数の傾きをそれぞれコントロールする．またこの  $g$  関数は図 2.7 に示すような N 字型の関数となる． $dg(x)/dx < 0$  となる領域は  $x = 0.5$  を中心に左右に対称な形で存在し，パラメータ  $\alpha$  や  $\beta$  に応じてその幅が変化する．ID モデルでは，負性抵抗のダイナミクスが生じる領域を負性抵抗領域と定義し，また領域の幅  $L$  を  $x = 0.5$  から両端までの距離として定義する．このとき  $L$  は  $\alpha$  ,  $\beta$  を用いて以下のように表される．

$$L = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\beta(\alpha - \tau_x/\tau_u)}} \quad (2.13)$$

式 (2.13) より，パラメータ  $\alpha$  ,  $\beta$  を大きくすることで負性抵抗領域の幅も広がることが分かる．

### 2.3.2 エネルギー関数

ネットワークが対称結合を持つ場合，ID ネットワークでも Hopfield ネットワークと同様にエネルギー関数を定義できる．ID ネットワークのエネルギー関数は以下の式で定義される．

$$E_{\text{ID}} = -\frac{1}{\tau_u} \left( \frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij} x_i x_j + \sum_i h_i x_i \right) + \frac{1}{\tau_u} \sum_i \int_{\frac{1}{2}}^{x_i} g(x) dx + \frac{\tau_x}{2} \sum_i \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 \quad (2.14)$$

式 (2.14) のうち，第 1～3 項はネットワーク状態のポテンシャルエネルギーに対応する．また第 4 項は運動エネルギーに対応しており，ネットワーク状態が静止すると 0 となる．ID ネットワークのエネルギー関数の時間微分を計算すると，

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{ID}}}{dt} &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{\partial E_{\text{ID}}}{\partial x_i} \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \left\{ -\frac{1}{\tau_u} \left( w_{ii} x_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (w_{ij} + w_{ji}) x_j + h_i \right) + \frac{1}{\tau_u} g(x_i) + \tau_x \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right\} \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \left\{ -\frac{du_i}{dt} - \frac{u_i}{\tau_u} + \frac{1}{\tau_u} g(x_i) + \tau_x \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right\} \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \left\{ -\left( \tau_x \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} \right) - \frac{1}{\tau_u} \left( \tau_x \frac{dx_i}{dt} + g(x_i) \right) + \frac{1}{\tau_u} g(x_i) + \tau_x \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right\} \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \left\{ -\frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{\tau_x}{\tau_u} \frac{dx_i}{dt} \right\} \\ &= -\sum_i \eta(x_i) \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる．これより，全てのニューロンに関して粘性抵抗係数  $\eta(x_i) > 0$  が成り立つ場合，Hopfield ネットワークの場合と同様に状態が更新されることが分かる．しかしニューロンが 1 つでの負性抵抗領域内に状態がある場合はネットワーク状態が  $E_{\text{ID}}$  の値が増加する方向に更新される．これによりエネルギー関数のポテンシャル壁を登り，極小値状態から脱出できる可能性がある．

改めて式 (2.14) を見てみると，式中に  $g$  関数が含まれていることが分かる．そこで式 (2.14) に式 (2.11) を代入すると，

$$\begin{aligned} E_{\text{ID}} &= -\frac{1}{\tau_u} \left( \frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij} x_i x_j + \sum_i h_i x_i \right) + \frac{1}{\tau_u} \sum_i \int_{\frac{1}{2}}^{x_i} \left\{ f^{-1}(x) - \alpha \left( x - \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{\tau_x}{2} \sum_i \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{\tau_u} \left( \frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij} x_i x_j + \sum_i h_i x_i \right) \\ &\quad + \frac{1}{\tau_u} \left\{ \sum_i \int_{\frac{1}{2}}^{x_i} f^{-1}(x) - \alpha \left( x_i^2 - \frac{1}{2} x_i \right) \right\} + \frac{\tau_x}{2} \sum_i \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

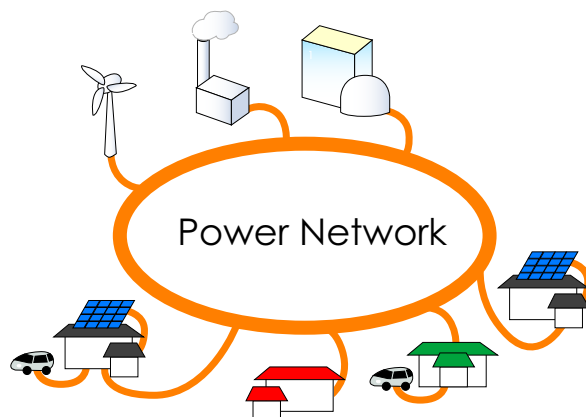


図 2.8 スマートグリッドのネットワークイメージ．電力の供給元としては火力，原子力，水力発電所といった大電力供給ノードの他に，風力発電所や個人所有の太陽光発電パネルなどの小電力・局地的電力供給ノードが接続される．

となり，エネルギー関数が  $\alpha$  の関数になっていることが分かる．しかし  $\alpha$  は負性抵抗領域のコントロールパラメータであるため， $\alpha$  の値によってエネルギー関数が増加することは望ましくない．そこでエネルギー関数への  $\alpha$  の効果を打ち消すために，補正を加えた自己結合  $W_{ii}$  とバイアス  $H_i$  を導入する [11]．

$$W_{ii} = w_{ii} + \alpha \quad (2.17)$$

$$H_i = h_i - \frac{1}{2}\alpha \quad (2.18)$$

これにより，エネルギー関数がコントロールパラメータの影響を受けないようにすることができる．

## 2.4 ニューラルネットワークによる組み合わせ最適化問題解探索

Hopfield ネットワークをはじめとするニューラルネットワークで組み合わせ最適化問題を扱うためには，最適解を表すネットワーク状態が最小値状態になるようなエネルギー関数を設計する必要がある．ここでは，組合せ最適化問題を埋め込むための 2 次形式のエネルギー関数について述べる．

### 2.4.1 組合せ最適化問題と近似アルゴリズム

組合せ最適化問題 (Combinatorial Optimization Problem) は，与えられた拘束条件を満たす組合せの中で，目的関数が最小になるような組合せをを求める問題である．本論文ではある解における目的関数の値を解のコストと呼び，コストが最小になるような解を最適解とする．組み合わせ最適化問題は科学・工学・オペレーションズリサーチ・経済など現代社会の至る所に現れるが，その一例としてはスマートグリッドにおける最適化が挙げられる．スマートグリッドとは，システム全体のエネルギー効率が最適化されるように供給元，送電，そして消費地をトータルで最適化する電力供給システムである (図 2.8)．供給元での発電スケジュール最適化，電力の分配最適化，電力消費スケジュールの最適化や家庭内発電電力の再分配，さらに電気自動車の充放電タイミングの最適化など，

スマートグリッドに含まれる最適化問題やスケジューリング問題は膨大である。さらに、これらの最適化は外界の状況変化に応じて、実時間で行われる必要がある。しかし、組合せ最適化問題の多くは NP(Non-deterministic Polynomial time) 困難または NP 完全のクラスに属するため、問題の規模(サイズ)が大きくなると計算時間の爆発が起こる。そこで、厳密な解を得ることよりも、近似的によりよい解を実時間で求める方法が提案されている。これらは近似アルゴリズムと呼ばれ、より効率的な解探索の方法を求めて盛んに研究がされてきた。ニューラルネットワークによる解探索もその一種であるが、ここではそれ以外の近似アルゴリズム解法について、その一部を紹介する [2, 21]。

### 遺伝的アルゴリズム

自然界における生物の進化過程を模倣することで最適解を探索する手法が遺伝的アルゴリズムである。具体的には、今得られている解集合に対して、解同士の一部を交換させ新しい解集合を得る(交配)。そして交配で得られた解集合のなかで、よりコストの小さい解集合を生存させる(自然淘汰)。またノイズを付加するために、時として新しい情報を得られた解に注入する(突然変異)。これらの操作を繰り返すことで、よりよい解を得ることができる。

### タブーサーチ

タブーサーチは、一度得られた解状態をタブーリストに記憶し、この解を再び探索することを禁止する。またタブーリストは現在の解がそれまでの探索解中で最もよい解の場合など、ある条件が満たされたときにその内容が書き換えられる。これにより、よりよい解を求めて解探索を続けることができる。

### シミュレーテッドアニーリング

シミュレーテッドアニーリングは、解探索を行う際、ある一定確率でコストが悪くなるような解状態への遷移を認める。これにより、解空間を大域的に探索することができる。また悪い解状態への遷移確率を時間的にゆっくりと減少させることで最適解が得られる。

ここで挙げたこれらの近似アルゴリズムは、いずれも大域的な解探索が可能であり、かつ汎用性が確保された手法である。しかし一方では、パラメータによって得られる解の質や解探索時間が大きく変化し、しかもパラメータの決定法が経験的であること、また最適解が得られても解探索は停止しないことなどが弱点として挙げられる。

## 2.4.2 ニューラルネットワークによる解探索

ニューラルネットワークによる組合せ最適化問題の解探索もまた近似アルゴリズム解法の一種である。ここでは、ニューラルネットワークによる組合せ最適化問題解探索の手法と、解探索性能について述べる。まず、組合せ最適化問題の解をニューラルネットワークで表す方法を示す。サイズ  $n$  の問題をニューラルネットワークで扱う場合、 $n \times m$  のネットワークを用意する。この時、 $u$  行  $i$  列の

ニューロンの出力を  $x_{u,i}$  とすると, 組み合わせ最適化問題は以下の式で表すことができる [22] .

$$\text{Minimize } \sum_u^n \sum_i^m \left( a_{u,i} + \sum_v^n \sum_j^m b_{ui,vj} x_{v,j} \right) x_{u,i}, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & \sum_x^n x_{u,i} = s \quad \text{for any } u, \\ & \sum_i^m x_{u,i} = t \quad \text{for any } i, \\ & x_{u,i} \in 0, 1 \quad \text{for any } u, i. \end{aligned} \quad (2.20)$$

ただし  $\mathbf{x} = (x_{u,i}) \in [0, 1]^{n \times m}$  は各ニューロンの出力であり, 本論文では  $x_{u,i} \sim 1$  のとき, ニューロン  $(u, i)$  は発火状態であると定義する. ここで式 (2.20) はニューラルネットワーク上の制約条件を表しており,  $s (\leq n), t (\leq m)$  はそれぞれ各行, 各列で発火すべきニューロンの数を表している. この制約条件は実装する組合せ最適化問題の制約条件と関連しており, 問題によって  $s, t$  を設定する必要がある. この制約条件の満足下で, 式 (2.19) は問題の目的関数を表している. ここで  $a_{u,i}$  はニューロン  $(u, i)$  が発火状態であることによる増加するコストを, また  $b_{ui,vj}$  はニューロン  $x_{u,i}$  と  $x_{v,j}$  が発火することにより増加するコストを表している. これらを適当に設定することで様々な問題を扱うことができる. これらの定式化から, 組合せ最適化問題は目的関数 (2.19) が最も小さくなるようなニューロンの発火パターンを探索する問題に置き換えることができる. なお以下では簡易化のため,  $a_{u,i} = 0, s = t = 1, n = m$  として議論を進める.

式 (2.19), 式 (2.20) によって条件を与えられる時, 問題を記述するエネルギー関数は以下の式で表される.

$$\begin{aligned} E_C = & \frac{A}{2} \sum_u^n \left( \sum_i^n x_{u,i} - 1 \right)^2 + \frac{A}{2} \sum_i^n \left( \sum_u^n x_{u,i} - 1 \right)^2 \\ & + \frac{B}{2} \sum_u^n \sum_i^n x_{u,i} (1 - x_{u,i}) \\ & + \frac{C}{2} \sum_u^n \sum_i^n \sum_v^n \sum_j^n b_{ui,vj} x_{u,i} x_{v,j} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ここで  $A, B, C$  は正の定数である. 式 (2.21) のうち, 第 1 項と第 2 項は各行各列でニューロンが 1 つ選択されることを要請する制約条件である. また第 3 項は, 各ニューロンの出力が 0 または 1 を取り, その中間値を取らないことを要請する制約条件である. このように各行各列でニューロンが 1 つ選択され, かつ出力が 0 または 1 を取っている状態を解状態と呼び, この状態の元では第 1 項 ~ 第 3 項は 0 となる. 解状態を満足している時, 第 4 項はネットワーク状態が表す解のコストの大きさを表す. よって第 4 項が最小になるような解状態を探索することで, 組み込まれた最適化問題の最適解を得ることができる. ニューラルネットワークによる組合せ最適化問題の解探索では, この問題を記述するエネルギー関数がネットワークのエネルギー関数と一致するようにネットワークの荷重値を設定することで, ネットワークに問題を埋め込む.

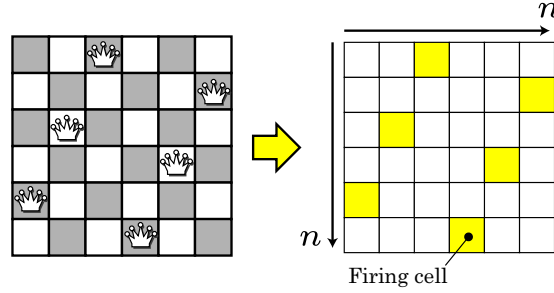


図 2.9 N-Queen 問題の例とネットワークの構成．黄色で示したセルは発火セルを表す．

### 2.4.3 本研究で扱う組み合わせ最適化問題の例

次に，本研究で扱う組合せ最適化問題の例と，それらを記述するためのコスト行列を示す．

#### N-Queen 問題

N-Queen 問題は， $n$  個のクイーンを  $n \times n$  のチェス盤に互いに戦わないように配置する時，その配置を求める問題である．ニューラルネットワークでは，発火したニューロンの位置をクイーンの配置位置として解を読み取る (図 2.9)．このとき，コスト行列の成分  $b_{ui,vj}$  は以下ようになる．

$$b_{ui,vj} = \begin{cases} 1 & (\text{ニューロン } (u, i) \text{ がニューロン } (v, j) \text{ の斜めに位置する.}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.22)$$

また N-Queen 問題ではネットワーク状態が最適解を示す時，目的関数 (2.19) は 0 になる．このため，最小値状態においては式 (2.21) の値が 0 となる．

#### 巡回セールスマン問題

巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem: TSP) は， $n$  個の都市を一通り巡る時の最小経路を求める問題である．TSP の問題例とネットワーク実装時のイメージを図 2.10 に示す．各発火ニューロンの列インデックスを都市番号，行インデックスをその都市を訪れる順番として解を読み取ることができる． (図 2.10)．このとき，コスト行列の成分  $b_{ui,vj}$  は以下ようになる．

$$b_{ui,vj} = \begin{cases} d_{u,v} & (j = i + 1 \text{ or } j = i - 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.23)$$

ここで  $d_{u,v}$  は都市  $u$  と  $v$  の間の距離を表す．またインデックス  $i, j$  は循環するインデックスである．ネットワークが解状態を示す時，解のコストはネットワーク状態が表す経路での経路長の 2 倍の長さを表す．このことから，ネットワーク状態が最小値状態に到達しても式 (2.21) は 0 にならない．この点が N-Queen 問題との大きな違いである．

#### 2 次割り当て問題

2 次割り当て問題 (Quadratic Assignment Problem: QAP) は， $n$  個の点と要素に対して各 2 点

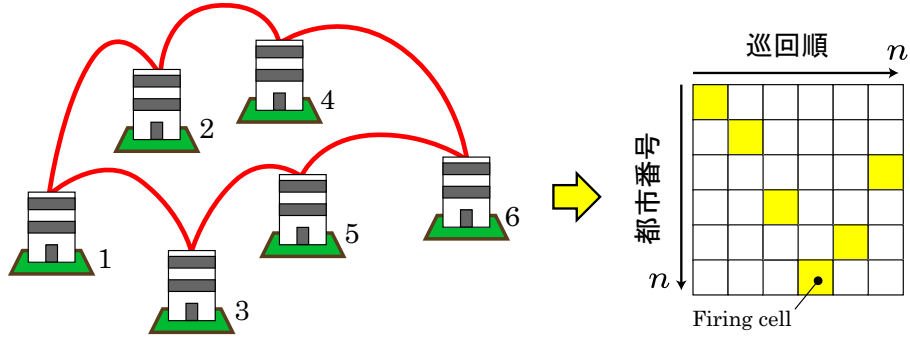


図 2.10 TSP 問題の例とネットワークの構成．黄色で示したセルは発火セルを表す．

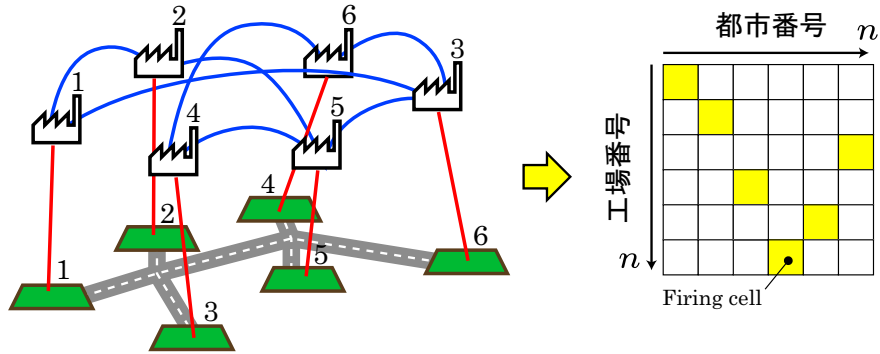


図 2.11 工場配置問題の例とネットワークの構成．黄色で示したセルは発火セルを表す．

間の距離  $d = d_{i,j}$  と各要素間の相互関係  $f = f_{i,j}$  ( $1 \leq i, j, u, v \leq n$ ) が与えられた時に、以下の式が最小になるような順列  $P$  を求める問題である [23]．

$$\text{Cost}(P) = \sum_i^n \sum_j^n d_{ij} f_{\pi(i)\pi(j)}$$

$$P = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)) \quad (2.24)$$

QAP の例としては工場配置問題が挙げられる (図 2.11)．これは工場間の物流コストが最小になるように  $n$  個の都市に  $n$  個の工場を配置する問題である．このとき  $d_{i,j}$  は都市  $i, j$  間の距離を、また  $f_{u,v}$  は工場  $u, v$  間の物流量を表す．またニューラルネットワークでは、ニューロン行列の横軸を都市番号、縦軸を工場番号として解を読み取ることができる．QAP を実装する場合  $b_{ui,vj}$  は以下のように定義される．

$$b_{ui,vj} = d_{i,j} f_{u,v} \quad (2.25)$$

ネットワークが解状態を示す時、解のコストは工場間全体での物流コストの総和を表す．また QAP において、 $f_{i,j}$  の値を

$$f_{ij} = \begin{cases} 1 & (j = i + 1 \text{ or } j = i - 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.26)$$



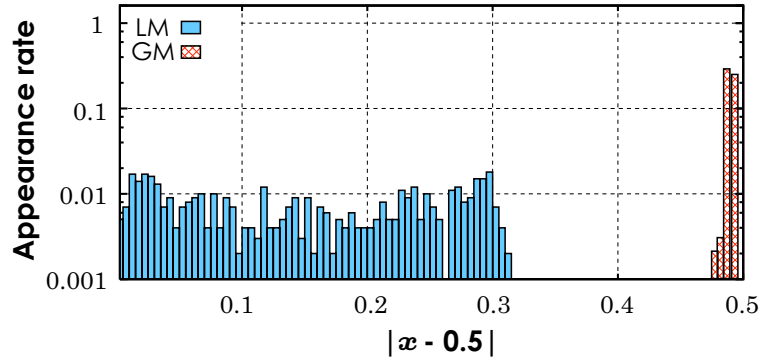
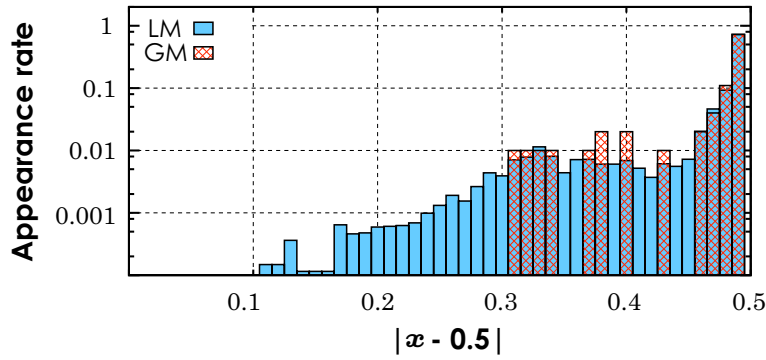
(a) 8-Queen 問題 ( $\beta = 20$ ) [24](b) 10 都市 TSP ( $\beta = 8$ )

図 2.12 ネットワーク状態静止時のニューロン出力のヒストグラム．GM は最小値状態，LM はそれ以外の極小値状態をそれぞれ示す．

とすると TSP と等価になる．このことから，QAP は TSP を含んだ問題であるといえる．

#### 2.4.4 ID ネットワークによる組合せ最適化問題解探索

ここでは ID ネットワークによる組合せ最適化問題の解探索について，その利点と課題を示す．まず，N-Queen 問題や 4 色問題などの比較的難易度の低い問題に適用した場合をしてみる．図 2.12(a) は式 (2.21) を用いて Hopfield ネットワークを 8-Queen 問題の解探索に適用した場合の，ネットワーク出力の平衡点のヒストグラムを表している．ここで横軸は出力の  $x = 0.5$  からの距離，縦軸は出現確率を示している．図 2.12(a) より，N-Queen 問題に適用した場合では最小値状態とそれ以外の極小値状態の平衡点が分かれて分布していることが分かる．さらに，最小値状態の平衡点は  $x = 0$  または 1 の近傍に分布し，それ以外の平衡点がその中間値部分に分布している．したがって ID ネットワークの負性抵抗の効果によりこの中間値部分に分布した極小値状態を不安定化することで，最小値状態のみを安定状態で得ることができる．実際，ID ネットワークに N-Queen 問題や 4 色問題を適用した場合，ネットワーク状態が静止すれば 100% 最適解が得られることが示されている [11]．また同時に，静止状態で最適解のみを得るためのパラメータの設定条件なども示されている．

次に、TSP や QAP の解探索に ID ネットワークを適用した場合をしてみる。10 都市 TSP に Hopfield ネットワークを適用した場合のネットワーク出力の平衡点分布は図 2.12(b) のようになる。10 都市 TSP に適用した場合、最小値状態とそれ以外の状態の平衡点が混在して分布している。このため、N-Queen 問題の場合のように最小値状態以外のみを ID ネットワークの負性抵抗で不安定化することができず、静止状態で最適解のみを得ることができない。TSP 解探索を ID ネットワークにより行う別の方法としては、動的解表現と呼ばれる方法でネットワーク状態から解を読み取ることで、最適解を得られることが数値実験によって確認されている [11, 25]。しかし一部の TSP については必ずしも最適解が得られないことや、そのままでは QAP 解探索を行えないことなどが示されており [26]、解探索手法として十分に確立していない。

#### 2.4.5 高次結合を導入した Hopfield ネットワークによる TSP 解探索

一方、Hopfield ネットワークによる組合せ最適化問題の解探索手法として高次結合 Hopfield ネットワーク (High-Order Hopfield network) [10] による TSP 解探索が提案されている [15]。高次結合 Hopfield ネットワークは Hopfield ネットワークに高次シナプス結合 (3 章参照) を導入したネットワークである。高次シナプス結合を導入することにより、2 次以上のエネルギー関数を定義することが出来るため、エネルギー関数の設計における自由度が増す。

特に 3 次までの高次結合を導入した場合、ネットワークには 4 次形式のエネルギー関数が定義される。この 4 次形式のエネルギー関数を用いることで、TSP 解探索において、最小値状態の平衡点がネットワークの出力空間の頂点に集まることが示されている [15]。一方、極小値状態の平衡点は出力空間の頂点には存在せず、0 と 1 の中間値を取る。これにより、TSP 解探索においても図 2.12(a) に示した場合と同様に最小値状態と極小値状態の平衡点を分離することができる。しかし、高次結合 Hopfield ネットワークには状態を不安定化するダイナミクスはないため、極小値状態でもネットワークが静止してしまう問題が依然として存在している。また TSP 以外の問題の解探索への適用は行われていなかった。

## 2.5 ID ネットワークのハードウェアへの実装

ニューラルネットワークの並列処理特性を活かして情報処理を行うためには、各ニューロン素子が独立して演算を行えなければならない。LSI によるハードウェア実装はニューラルネットワークの並列的な情報処理を実現できる手法の 1 つである。各ニューロン素子を独立した演算素子として回路上に実装することで、並列処理とネットワークの大規模化や高速動作が可能となる。

ID ネットワークについては、既にアナログ LSI による実装 [7, 9] やデジタル LSI による実装 [27] が行われており、それぞれ動作が確認されている。アナログ回路による実装では、36 個のニューロン素子とそれらを結ぶ全結合型のシナプス回路が実装されている。荷重値は 2bit の精度を持ち、この回路を用いて実際に N-Queen 問題などを解けることが示されている [9, 25]。一方デジタル回路による実装では、ストカスティック論理と呼ばれる手法を用いてアナログ値をデジタルパルス列に変換することで ID ネットワークの実装が行われている [27]。アナログ回路・デジタル回路によ

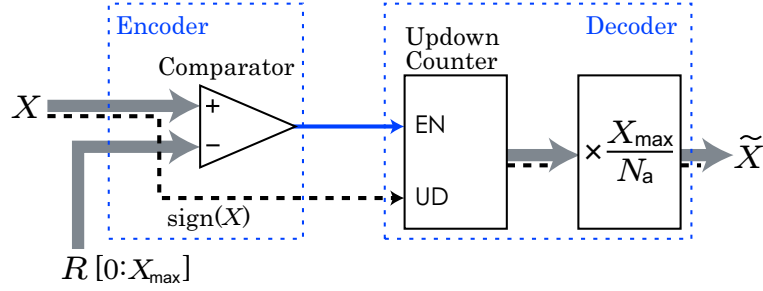


図 2.13 ストカスティックパルスのコーディング・デコーディング回路．太線はマルチ bit ラインを，点線は符号ラインを，また単線は 1bit ラインをそれぞれ表す．また青の単線部分が，ストカスティックパルスが流れる部分である．

る実装にはそれぞれ一長一短があるが，回路の拡張性やノイズ耐性などはデジタル回路による実装の方が優れている．ここでは，特にストカスティック論理を用いた ID ネットワークのデジタル回路実装について述べる．

### 2.5.1 ストカスティック論理によるコーディングと演算

ストカスティック論理とは，多ビット値を 1 ビットのパルス列に変換して演算を行う手法である [28]．多ビット値を時間方向に展開することで，回路リソースを削減できるメリットがあり，実際にデジタル LSI による 1000 ニューロンの実装などが実現されている [29]．ストカスティック論理による多ビット値  $X$  からパルス列へのコーディングユニット，およびデコーディングユニットは図 2.13 で示す回路で実装される．ここで  $R$  は  $[0 : X_{\max}]$  の範囲で生成された一様乱数であり， $X_{\max}$  は入力の絶対値  $|X|$  の最大値を表す．入力  $X$  はコンパレータで乱数  $R$  と比較され， $X > R$  が成り立つ時パルスが生成される．これにより，パルスが生成される確率は  $X$  に比例するため，アナログ値  $X$  がパルスの発火頻度に変調される．またパルス変調されたことにより，積演算を AND ゲートにより行うことができる．ストカスティックパルスはアップダウンカウンタにより積算することで，アナログ値にデコードされる．積算は  $N_a$  回行われ，この積算値を  $X_{\max}/N_a$  で正規化することでデコードされたアナログ値  $\tilde{X}$  が得られる．この時， $\tilde{X}$  には乱数  $R$  に起因するストカスティックなノイズが含まれる． $R$  は一様乱数なので，得られた  $\tilde{X}$  の期待値  $E[\tilde{X}]$  と分散  $V[\tilde{X}]$  は以下の式で表される．

$$E[\tilde{X}] = \frac{X_{\max}}{N_a} \cdot N_a P_f = X \quad (2.27)$$

$$V[\tilde{X}] = \left( \frac{X_{\max}}{N_a} \right)^2 N_a P_f (1 - P_f) = \frac{1}{N_a} X (X_{\max} - X) \quad (2.28)$$

ここで  $P_f$  はパルスの生成確率 ( $P_f = X/X_{\max}$ )， $N_a$  はパルスの積算回数を表す．式 (2.28) より， $N_a$  が小さいほど  $\tilde{X}$  へのストカスティックノイズの影響は大きくなり，逆に  $N_a$  が大きいほど  $\tilde{X}$  の精度が上がるのが分かる．また同じ  $N_a$  であれば， $W_{\max}$  が小さい方が精度が上がる．

### 2.5.2 デジタル回路による ID ネットワークの実装

デジタル回路で ID ネットワークを実装するためには、連続時間の ID モデルを離散時間化しなければならない。Euler 法により時間離散化された ID ネットワークは以下の式で表される [27]。

$$u_i(t + \Delta) = \left(1 - \frac{\Delta}{\tau_u}\right) u_i(t) + \frac{\Delta}{\tau_u} \left( \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t) + h_i \right) \quad (2.29)$$

$$x_i(t + \Delta) = x_i(t) + \frac{\Delta}{\tau_x} \left( u_i(t) - g(x_i(t)) \right) \quad (2.30)$$

ここで  $\Delta$  は時間刻みであり、十分に小さな値をとることで、ID ネットワークのダイナミクスが保存されと考えられる。この離散時間 ID ネットワークにストカスティック論理を導入することで、ID ネットワークをデジタル回路上に実装することが可能になる。先行研究 [27] による実装には FPGA を用い、30 個のニューロン素子とその間をつなぐ全結合型のシナプスが実現されている。荷重値の精度は 8bit あり、このネットワークにより連想記憶のシステムが実現されている。



### 3 高次結合逆関数遅延ネットワーク

前章では ID ネットワークによる組合せ最適化問題解探索の利点と問題点について述べ、TSP や QAP などの比較的難易度が高い問題の解探索法が確立されていないことを示した。そこで本章では、高次結合逆関数遅延ネットワークによる TSP や QAP の解探索を提案する。まず高次結合を導入した ID ネットワークを提案した後、TSP や QAP に高次結合ネットワークを適用するための 4 次形式のエネルギー関数について考察する。

#### 3.1 ID ネットワークへの高次結合の導入

通常のスナプス結合では、ある 1 つのニューロンからの出力と荷重値の積が次のニューロンへと入力される。これに対して、高次スナプス結合では複数のニューロンの出力の和と単一の荷重値の積が次のニューロンへと入力される (図 3.1)。生体ではこれに似た構造の結合として、スナプス前抑制 (presynaptic inhibition) が知られている [16]。また実際の神経細胞網では、細胞体での情報処理とは別に樹状突起においても高次の情報処理が行われていることが分かっており [30]、高次結合はこの樹状突起での情報処理に当たると捉えることもできる。高次スナプス結合を持つニューラルネットワークの応用例としては、高次 Hopfield ネットワークの他にも 3SAT 問題の解探索 [31] など幾つ

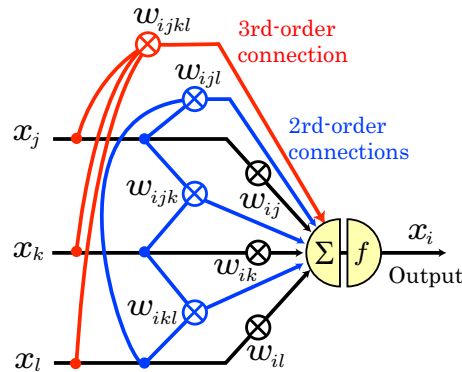


図 3.1 高次スナプス結合のイメージ。黒矢印は通常のスナプス結合を表し、青矢印・赤矢印がそれぞれ 2 次・3 次の高次スナプス結合を表す。

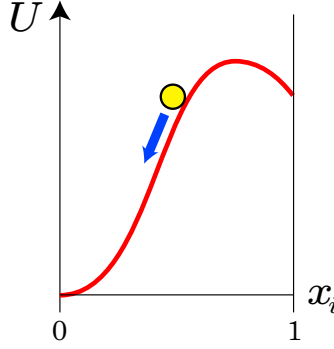


図 3.2 HC-ID モデルのダイナミクスのイメージ .

かの応用で導入されている．ここでは高次結合を ID ネットワークに導入した，高次結合逆関数遅延ネットワーク (Higher order Connections Inverse function Delayed network: HC-ID network) を提案し，組合せ最適化問題の解探索へ適用する．

3 次までの高次結合を有する HC-ID モデル (3 次 HC-ID モデル) は以下の式で表される．

$$\tau_u \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N w_{ijkl} x_j x_k x_l + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} x_j x_k + \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j + h_i \quad (3.1)$$

$$\tau_x \frac{dx_i}{dt} = u_i - g(x_i) \quad (3.2)$$

ここで  $w_{ijk\dots}$  は  $j, k, l, \dots$  番目のニューロンからニューロン  $i$  への高次結合の荷重値を示している．基本的には ID モデルに 3 次までの高次結合を導入した更新式であるが，ID モデルにあった散逸項 ( $-u_i$ ) が HC-ID モデルでは省かれている．式 (3.1), (3.2) より  $u_i$  を消去すると，以下の式が得られる．

$$\tau_x \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \eta(x_i) \frac{dx_i}{dt} = - \frac{\partial U_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (3.3)$$

ここで

$$\eta(x_i) = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x}) = & -\frac{1}{4\tau_u} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l w_{ijkl} x_i x_j x_k x_l - \frac{1}{3\tau_u} \sum_i \sum_j \sum_k w_{ijk} x_i x_j x_k \\ & - \frac{1}{2\tau_u} \sum_j w_{ij} x_i x_j - \frac{1}{\tau_u} \sum_i h_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

となり，HC-ID モデルのダイナミクスも ID モデルと同様にポテンシャル中の粒子のダイナミクスと等価であることが分かる．また負性抵抗領域についても，ID モデルと同様に  $g$  関数の傾きにより定義される．ただし，3 次 HC-ID モデルではそのポテンシャル  $U_{\text{HC-ID}}$  は 4 次形式となる (図 3.2)．

ここで HC-ID モデルの内部状態の発散について考える．上でも述べたように HC-ID モデルの更新式には散逸がないため，内部状態が  $\pm\infty$  に発散する可能性がある．これを防ぐため，内部状態の

更新式を以下のように修正する．

$$\theta_i = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N w_{ijkl} x_j x_k x_l + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} x_j x_k + \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j + h_i \quad (3.6)$$

$$\tau_u \frac{du_i}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{if } (x_i \sim 0 \text{ and } \theta_i < 0) \text{ or } (x_i \sim 1 \text{ and } \theta_i > 0) \\ \theta_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.7)$$

これにより，出力が 0 または 1 近傍の値を取る場合，内部状態が現状値よりも発散しないように制限することができる．

### 3.1.1 エネルギー関数とネットワークの安定性

ネットワークが対称結合である場合 ( $w_{ijkl} = w_{jikl} = w_{jilk} = \dots$ )，HC-ID ネットワークにおいても ID ネットワークと同様にエネルギー関数を定義することができる．

$$\begin{aligned} E_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x}) = & -\frac{1}{4\tau_u} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N w_{ijkl} x_i x_j x_k x_l - \frac{1}{3\tau_u} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} x_i x_j x_k \\ & - \frac{1}{2\tau_u} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij} x_i x_j - \frac{1}{\tau_u} \sum_{i=1}^N h_i x_i + \frac{\tau_x}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

3 次までの高次結合を導入したため，ネットワークのエネルギー関数は 4 次形式となる．また ID ネットワークと同様，状態静止時には  $E_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x}) = U_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x})$  が成り立つ．さらにエネルギー関数の時間微分についても，ID ネットワークの場合と同様に計算することができ，

$$\frac{d}{dt} E_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x}) = - \sum_i \eta(x_i) \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 \quad (3.9)$$

が成り立つ．これより，HC-ID ネットワークについても負性抵抗領域内ではエネルギー関数が増加する方向に状態更新が行われることが分かる．

次に，HC-ID ネットワークの状態安定性について考える．式 (3.3) より，HC-ID モデルはポテンシャルから受ける力  $-\partial U_{\text{HC-ID}}/\partial x$  により状態が変化する．また  $g$  関数により，ニューロンの出力は  $0 < x < 1$  に制限される．これらのことから， $x = 0$  または 1 近傍でニューロンの出力が安定している場合，ニューロンの動作は図 3.3 で示すようなポテンシャル中の粒子の動作として捉えることができる． $x = 0$  近傍においてポテンシャルから受ける力が正の場合，出力は 0 近傍から動いてしまい安定することができない．このため，ニューロン  $i$  が  $x_i = 0$  で安定している場合は (図 3.3(a))  $-\partial U_{\text{HC-ID}}/\partial x_i \leq 0$  が成り立たなければならない．同様に，ニューロン  $i$  が  $x_i = 1$  近傍で安定するためには (図 3.3(b))  $-\partial U_{\text{HC-ID}}/\partial x_i \geq 0$  が成り立つ必要がある．これらのことから，HC-ID モデルの出力の 0，1 近傍での安定性は  $-\partial U_{\text{HC-ID}}/\partial x_i$  で決まり，0 近傍では

$$-\frac{\partial U_{\text{HC-ID}}}{\partial x} \begin{cases} \leq 0 & \text{ならば安定} \\ > 0 & \text{ならば不安定} \end{cases} \quad (3.10)$$



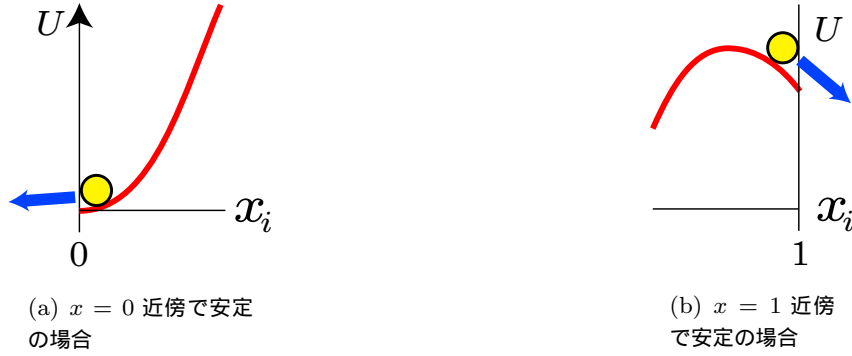


図 3.3  $x = 0$  または  $1$  近傍での HC-ID モデルの動作とポテンシャル  $U_{\text{HC-ID}}$  の関係 .

となる . また  $1$  近傍では

$$-\frac{\partial U_{\text{HC-ID}}}{\partial x} \begin{cases} \geq 0 & \text{ならば安定} \\ < 0 & \text{ならば不安定} \end{cases} \quad (3.11)$$

が成り立つ .

### 3.2 組合せ最適化問題解探索のための 4 次形式のエネルギー関数

次に , 3 次の高次結合ネットワークを組合せ最適化問題解探索に適用するための 4 次形式のエネルギー関数を定義する . TSP に適用するための 4 次形式のエネルギー関数は既に提案されている [15] . ここでは先行研究を基に QAP など記述できるより汎用性の高いエネルギー関数を考える .

2 次形式のエネルギー関数 (式 (2.21)) の場合と同様に  $n \times n$  のニューロン行列を考える . このとき , 4 次形式のエネルギー関数を以下のように定義する .

$$\begin{aligned} E_{\text{CH}}(\mathbf{x}) = & \frac{A}{2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{u=1}^n x_{u,i} - 1 \right)^2 + \frac{A}{2} \sum_{u=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_{u,i} - 1 \right)^2 \\ & + \frac{B}{2} \sum_{u=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ui,vj} x_{u,i} x_{v,j} (1 - x_{u,i} x_{v,j}) \\ & + \frac{C}{2} \left( \sum_{u=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ui,vj} x_{u,i} x_{v,j} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

式 (3.12) のうち , 第 1 項・第 2 項は各行各列のニューロンの発火個数を制限する拘束条件項である . これは 2 次形式のエネルギー関数の第 1 項・第 2 項をそのまま使用している . 第 3 項はニューロンの出力が 0 または 1 をとることを要請する拘束条件項である . 式 (2.21) の第 3 項との違いは , 4 次の項が含まれていること , また  $b_{ui,vj}$  が含まれていることが挙げられる . これらの拘束条件項は , 条件が満足される場合は全て 0 となる . 全ての拘束条件が満足される時 , 第 4 項はネットワーク状態が

示す解のコストを 2 乗した値と等価となる．すなわち  $c_{\text{sol}}(x)$  を

$$c_{\text{sol}}(x) = \frac{1}{2} \sum_{u=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ui,vj} x_{u,i} x_{v,j} \quad (3.13)$$

と定義すると，拘束条件満足下では  $c(x)$  はネットワーク状態  $x$  が示す解のコストを表し，式 (3.12) の第 4 項は解のコストを 2 乗したものに相当する．コストを 2 乗することで，解状態間のコスト差が増幅されると考えられる．

### 3.2.1 HC-ID ネットワークへの導入

ここで式 (3.12) を導入した場合の，HC-ID ネットワークの状態安定性について考える．4 次形式のエネルギー関数を導入することで，HC-ID モデルのポテンシャルとの間に  $E_{\text{CH}} = U_{\text{HC-ID}}$  が成り立つ．これより， $E_{\text{CH}}$  を導入した HC-ID ネットワークの  $x = 0$  近傍での安定性は

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}}{\partial x} \begin{cases} \geq 0 & \text{ならば安定} \\ < 0 & \text{ならば不安定} \end{cases} \quad (3.14)$$

で表され，また 1 近傍では

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}}{\partial x} \begin{cases} \leq 0 & \text{ならば安定} \\ > 0 & \text{ならば不安定} \end{cases} \quad (3.15)$$

となる．このことから，4 次形式のエネルギー関数  $E_{\text{CH}}$  を導入した HC-ID ネットワークの安定性は， $\partial E_{\text{CH}}/\partial x$  の符号によって議論できる．

そこで次に，4 次形式のエネルギー関数  $E_{\text{CH}}$  を HC-ID ネットワークに適用した場合のエネルギー関数の傾きについて考える．まず  $E_{\text{CH}}$  について，あるニューロンの出力  $x_{\hat{u},\hat{i}}$  に関する項とそれ以外の項を分離すると以下の式が得られる．

$$\begin{aligned} E_{\text{CH}}(x) = & \frac{A}{2} \left\{ \left( x_{\hat{u},\hat{i}} + \sum_{u \neq \hat{u}} x_{u,\hat{i}} - 1 \right)^2 + \sum_{i \neq \hat{i}} \left( \sum_{u \neq \hat{u}} x_{u,i} - 1 \right)^2 \right\} \\ & + \frac{A}{2} \left\{ \left( x_{\hat{u},\hat{i}} + \sum_{i \neq \hat{i}} x_{\hat{u},i} - 1 \right)^2 + \sum_{u \neq \hat{u}} \left( \sum_{i \neq \hat{i}} x_{u,i} - 1 \right)^2 \right\} \\ & + \frac{B}{2} \left\{ b_{\hat{u},\hat{u}} x_{\hat{u},\hat{i}}^2 (1 - x_{\hat{u},\hat{i}}^2) + 2 \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} b_{\hat{u},vj} x_{\hat{u},\hat{i}} x_{v,j} (1 - x_{\hat{u},\hat{i}} x_{v,j}) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{u \neq \hat{u}} \sum_{i \neq \hat{i}} \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} b_{ui,vj} x_{u,i} x_{v,j} (1 - x_{u,i} x_{v,j}) \right\} \\ & + \frac{C}{2} \left( b_{\hat{u},\hat{u}} x_{\hat{u},\hat{i}}^2 + 2 \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} b_{\hat{u},vj} x_{\hat{u},\hat{i}} x_{v,j} + \sum_{u \neq \hat{u}} \sum_{i \neq \hat{i}} \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} b_{ui,vj} x_{u,i} x_{v,j} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

ただし式 (3.16) はコスト行列  $b$  は対称行列である ( $b_{ui,vj} = b_{vj,ui}$ ) ことを用いて導出している．これより,  $E_{CH}$  を  $x_{\hat{u},\hat{i}}$  について偏微分をとると以下が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{CH}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u},\hat{i}}} &= A \left( x_{\hat{u},\hat{i}} + \sum_{u \neq \hat{u}} x_{u,\hat{i}} - 1 \right) + A \left( x_{\hat{u},\hat{i}} + \sum_{i \neq \hat{i}} x_{\hat{u},i} - 1 \right) \\ &\quad + B \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{v,j} \left( 1 - 2x_{\hat{u},\hat{i}} x_{v,j} \right) \\ &\quad + C \sum_u \sum_i \sum_v \sum_j b_{ui,vj} x_{u,i} x_{v,j} \times 2 \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{v,j} \end{aligned} \quad (3.17)$$

ただし TSP や QAP では  $b_{ui,ui} = 0$  となることから,  $b_{\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{i}}$  の付いた項は省いている．ここで, ネットワーク状態が解状態を満足していると仮定するために, 以下の条件を満足していると仮定する．

1. パラメータ  $A$  が以下の条件を満たす．

$$A > \max \left\{ B \cdot m (n-1) b_{\max}, \frac{m}{2} b_{\max} [B + 2C \cdot m (n-2) b_{\max}] \right\} \quad (3.18)$$

ここで  $m$  はあるニューロンと, 同行同列以外に存在するニューロンとの間の結合の数を表す．また  $b_{\max}$  はコスト行列  $b$  の成分の最大値を表す．条件 (3.18) を満たす時, ネットワーク内には各行各列で必ず 1 つ発火ニューロンが存在する．(条件導出の詳細は付録 A を参照のこと．)

2. パラメータ  $\beta$  は十分大きい値を取る．この時, 式 (2.13) より  $L \sim 0.5$  となり, 負性抵抗領域が出力空間の頂点以外の領域全域を覆うことになる (図 3.4)．これによりニューロンの出力は 0 または 1 で安定になる．

これらの条件を仮定すると, 式 (3.17) はさらに以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{CH}}{\partial x_{\hat{u},\hat{i}}} &= \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{v,j} \times \left\{ 2B \left( \frac{1}{2} - x_{\hat{u},\hat{i}} \right) + 2C \sum_u \sum_i \sum_v \sum_j b_{ui,vj} x_{u,i} x_{v,j} \right\} \\ &= \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{v,j} \times \left\{ 2B \left( \frac{1}{2} - x_{\hat{u},\hat{i}} \right) + 4C c_{\text{sol}}(\mathbf{x}) \right\} \\ &= \sum_v b_{\hat{u}\hat{i},vF[v]} \times \left\{ \frac{B}{2C} \left( \frac{1}{2} - x_{\hat{u},\hat{i}} \right) + c_{\text{sol}}(\mathbf{x}) \right\} \\ &= \begin{cases} \sum_j b_{\hat{u}\hat{i},vF[v]} \cdot 4C \left\{ \frac{B}{4C} + c_{\text{sol}}(\mathbf{x}) \right\} & \text{if } x_{\hat{u},\hat{i}} \simeq 0 \\ \sum_j b_{\hat{u}\hat{i},vF[v]} \cdot 4C \left\{ -\frac{B}{4C} + c_{\text{sol}}(\mathbf{x}) \right\} & \text{if } x_{\hat{u},\hat{i}} \simeq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで  $F[v]$  は行  $v$  において発火しているニューロンの列インデックスを表す．式 (3.19) より,  $x_{\hat{u},\hat{i}}$  の符号は  $\{\cdot\}$  内の値の符号によって決定される． $x_{\hat{u},\hat{i}} \simeq 0$  の時,  $B/4C + c_{\text{sol}}(\mathbf{x}) > 0$  より常に  $\partial E_{CH}/\partial x_{\hat{u},\hat{i}} > 0$  が成り立つ．したがって式 (3.14) より, この状態は常に安定である．一方,  $x_{ah} \sim 1$

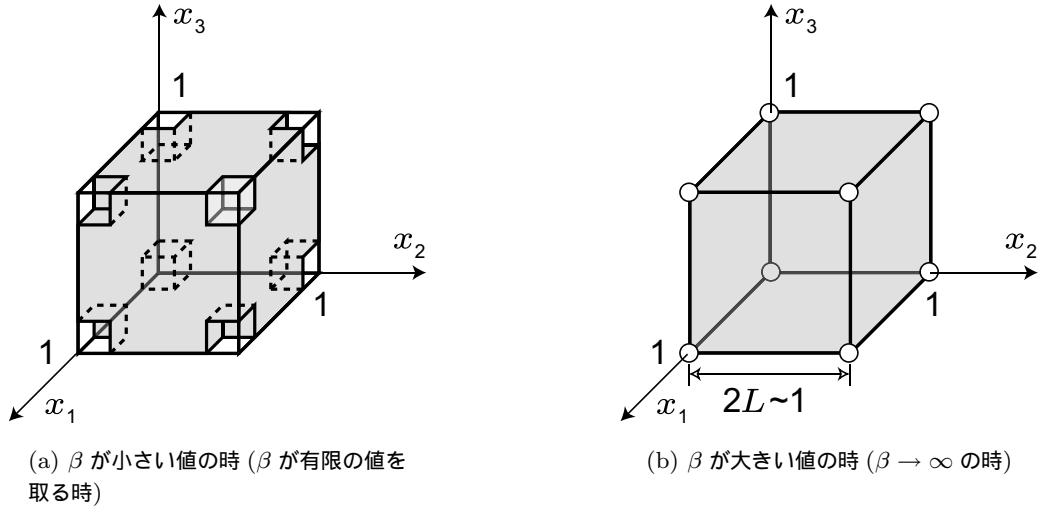


図 3.4 出力空間と負性抵抗領域のイメージ． $\beta$  が大きな値を取る場合，負性抵抗領域が出力空間の頂点以外の領域を全て覆う．

の時は  $c_{\text{sol}}(x)$  と  $B/4C$  の大小関係によって  $\partial E_{\text{CH}}/\partial x_{\hat{u},\hat{i}}$  の符号が変化する． $c_{\text{sol}}(x) < B/4C$  が成り立つ時は  $\partial E_{\text{CH}}/\partial x_{\hat{u},\hat{i}} < 0$  が成り立つ．よって式 (3.15) より，この状態は安定である．しかし  $c_{\text{sol}}(x) > B/4C$  の時は  $\partial E_{\text{CH}}/\partial x_{\hat{u},\hat{i}} > 0$  となり，この状態は不安定化される．これらのことから，ある解状態  $x$  に対して，

$$c_{\text{sol}}(x) \begin{cases} < B/4C & \text{ならば，解状態 } x \text{ は安定．} \\ > B/4C & \text{ならば，解状態 } x \text{ は不安定．} \end{cases} \quad (3.20)$$

が成り立つ．これはパラメータ  $B/4C$  の値が安定して存在できる解状態のコストの上限となることを示しており，このことから  $B/4C$  の値を調整することで得られる解のコスト値を設定できる．また，最適解状態のみを安定にするためには係数  $B/4C$  を以下のように設定すればよい．

$$c_{\text{sol}}(x_0) < \frac{B}{4C} < c_{\text{sol}}(x_1) \quad (3.21)$$

ただし， $x_0$  は最適解状態， $x_1$  は 2 番目にコストが大きい状態を表している．

### 3.3 極小値状態を不安定化するのに必要な負性抵抗領域の見積もり

前節までの議論では，最小値状態の平衡点を出力空間の頂点に集めるためのパラメータ条件を導出し， $\beta \rightarrow \infty$  の条件下では極小値状態のみを不安定化できることを示した．これは  $\beta \rightarrow \infty$  とすることで，出力空間の頂点以外の部分全域を負性抵抗領域で覆うことができるためである．しかし， $\beta$  は通常有限値をとるため，実際には負性抵抗領域で出力空間の中間値部分を完全に覆うことができない．そこで本節では極小値状態の平衡点位置を見積もり，極小値状態をすべて不安定化するために必要な負性抵抗領域の幅を見積もる．

今,  $\beta$  が有限であり, 負性抵抗領域の幅  $L$  が有限な幅  $\hat{L}$  を持つとする. ニューロン  $(u, i)$  の出力  $x_{u,i}$  は負性抵抗領域の外でのみ安定になれるので, 安定状態にあるニューロン  $(u, i)$  の出力は微量  $\xi_{u,i}$  を用いて以下のように書くことができる.

$$x_{u,i} = \begin{cases} \xi_{u,i} & \text{if } x_{u,i} \sim 0 \\ 1 - \xi_{u,i} & \text{if } x_{u,i} \sim 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

ただし  $0 < \xi(u, i) < (0.5 - \hat{L})$ . 以下ではこの表記を用いてエネルギー関数  $E_{\text{CH}}$  の  $x_{u,i}$  に関する偏微分値を見積もることで, 極小値状態の平衡点位置を見積もる.

### 3.3.1 $\beta$ が有限な場合のエネルギー関数の傾きの見積もり

まずネットワーク状態が解状態を示した状態で, あるニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  が発火状態で安定していると仮定する. この時, 行  $\hat{u}$  内で発火しているニューロンは列  $\hat{i}$  のニューロンのみである. そこでこのニューロンを  $(\hat{u}, F[\hat{u}])$  と表記する. ここで  $F[u]$  は解状態を満足するネットワーク中において, 行  $u$  中で発火するニューロンの列インデックスを表す記号である. この時, 式 (3.22) より  $x_{\hat{u}, F[\hat{u}]} = 1 - \xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]}$  と表記できる. またこの表記を用いると,  $E_{\text{CH}}$  の  $x_{\hat{u}, F[\hat{u}]}$  に関する偏微分は以下のように導出される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}, F[\hat{u}]}} &\approx A \left\{ -2\xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]} + \left( \sum_{u \neq \hat{u}} \xi_{u, F[\hat{u}]} + \sum_{i \neq F[\hat{u}]} \xi_{\hat{u}, i} \right) \right\} \\ &+ B \sum_{v \neq \hat{u}} \left\{ b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} (-1 + 3\xi_{vF[v]} + 2\xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]}) + \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vj} \xi_{vj} \right\} \\ &+ 2C \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} \times \left[ \sum_{z \neq \hat{u}} \left\{ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}], zF[z]} (1 - \xi_{\hat{u}F[\hat{u}]} - \xi_{zF[z]}) + 2 \sum_{k \neq F[z]} b_{\hat{u}F[\hat{u}], zk} \xi_{zk} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq \hat{u}} \left\{ b_{zF[z], yF[y]} (1 - 2\xi_{zF[z]}) + 2 \sum_{l \neq F[y]} b_{zF[z], yl} \xi_{yl} \right\} \right] \\ &+ 2C \sum_{v \neq \hat{u}} \left[ -b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} \xi_{vF[v]} + \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vj} \xi_{vj} \right] \times \sum_{z \neq \hat{u}} \left[ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}], zF[z]} + \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z], yF[y]} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

ただし, 以上の計算においてコスト行列  $x$  は以下の条件を満たすものとした.

- (1)  $b_{ui, vj} = b_{vj, ui}$
- (2)  $b_{ui, ui} = 0$
- (3)  $b_{ui, vi} = 0, b_{ui, uj} = 0$

これらの条件は TSP や QAP の解探索に適用した場合、満たされている条件である（詳しい導出については付録 C を参照のこと）。さらに式 (3.23) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_{CH}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}F[\hat{u}]}} \\
& \approx \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left[ -B + 2C \sum_{z \neq \hat{u}} \left\{ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} + \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \right\} \right] \\
& + \left[ A \left( \sum_{u \neq \hat{u}} \xi_{u,F[\hat{u}]} + \sum_{i \neq F[\hat{u}]} \xi_{\hat{u},i} \right) + B \sum_{v \neq \hat{u}} \left\{ b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} (3\xi_{v,F[v]} + 2\xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) + \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vj} \xi_{v,j} \right\} \right. \\
& \quad + 4C \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left\{ \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{k \neq F[z]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],zk} \xi_{z,k} + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq \hat{u}} \sum_{l \neq F[y]} b_{zF[z],yl} \xi_{y,l} \right\} \\
& \quad \left. + 2C \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vj} \xi_{v,j} \sum_{z \neq \hat{u}} \left( 2b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} + \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \right) \right] \cdots \textcircled{1} \\
& - \left[ 2A\xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} + 4C \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left\{ \sum_{z \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} (\xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} + \xi_{z,F[z]}) + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \xi_{z,F[z]} \right\} \right. \\
& \quad \left. + 2C \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \xi_{v,F[v]} \sum_{z \neq \hat{u}} \left\{ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} + \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \right\} \right] \cdots \textcircled{2} \quad (3.24)
\end{aligned}$$

式 (3.24) 中の①項は  $\xi$  の付く項の中で符号が正のものを、また②項は符号が負のものを表している。式 (3.24) より、 $\partial E_{CH}/\partial x_{\hat{u},F[\hat{u}]}$  は少なくとも①項が最大値を取り、かつ②項が全て 0 になる場合よりも大きな値を取ることが分かる。さらに、今発火ニューロン ( $\hat{u}, F[\hat{u}]$ ) の出力  $x_{\hat{u},F[\hat{u}]}$  がネットワーク中の他の発火ニューロンの出力と比べて最も小さいと仮定すると、ネットワーク中の全ての発火ニューロン ( $u, F[u]$ ) に対して以下が成り立つ。

$$0 \leq \xi_{u,F[u]} \leq \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} \quad (3.25)$$

これらのことから  $\partial E_{CH}/\partial x_{\hat{u},F[\hat{u}]}$  の下限値を見積もると、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_{CH}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u},F[\hat{u}]}} > \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left[ -B + 2C \sum_{z \neq \hat{u}} \left\{ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} + \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \right\} \right] \\
& \quad + \left[ 2B \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} \right] \\
& \quad - \left[ 2A\xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} + 4C \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left\{ \sum_{z \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} 2\xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} \right\} \right. \\
& \quad \left. + 2C \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} \sum_{z \neq \hat{u}} \left\{ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} + \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \right\} \right] \\
& = \sum_{y \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left[ -B + 2C \sum_{z \neq \hat{u}} \left\{ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} + \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \right\} \right] \\
& \quad + \left[ 2B \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} - 2A - 6C \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \sum_{z \neq \hat{u}} \left\{ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} + \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \right\} \right] \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

が得られる．さらに  $c_{\text{sol}}(\mathbf{x})$  を用いて式をまとめると，以下の下限値が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}, F[\hat{u}]}} &> \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} \left( -B + 4Cc_{\text{sol}}(\mathbf{x}) \right) \\ &\quad - \left[ 2A + 2 \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} \left( -B + 6Cc_{\text{sol}}(\mathbf{x}) \right) \right] \xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]} \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.3.2 極小値状態の平衡点位置の見積もり

今，ある解状態を示すネットワークの極小値状態  $\hat{\mathbf{x}}$  について，以下が成り立つとする．

$$c_{\text{sol}}(\hat{\mathbf{x}}) > \frac{B}{4C} \quad (3.28)$$

この場合，極小値状態  $\hat{\mathbf{x}}$  の平衡点は出力空間の頂点に存在しない．このとき，安定して存在する極小値状態の平衡点位置を見積もる．ここで，状態  $\hat{\mathbf{x}}$  が不安定である場合を考える．このとき，ネットワーク内には少なくとも 1 つは  $\partial E_{\text{CH}} / \partial x_{u, F[u]} > 0$  が成り立つような発火ニューロン  $(u, F[u])$  が存在する．したがって他の発火ニューロンに比べて出力が最も小さいニューロン  $(\hat{u}, F[\hat{u}])$  について，以下が成り立たなくてはならない．

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\text{CH}}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_{\hat{u}, F[\hat{u}]}} &> \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} \left( -B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \\ &\quad - \left[ 2A + 2 \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} \left( -B + 6Cc_{\text{sol}}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \right] \xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]} > 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

このことから， $\xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]}$  は以下の条件を満たす必要がある．

$$\xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]} < \frac{\sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} \left( -B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{\mathbf{x}}) \right)}{2A + 2 \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} \left( -B + 6Cc_{\text{sol}}(\hat{\mathbf{x}}) \right)} \quad (3.30)$$

ここで  $\sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]}$  はニューロン  $(\hat{u}, F[\hat{u}])$  が同行同列以外の発火ニューロンから受ける入力 of 総和を示すため，その値の範囲は以下ようになる．

$$m \cdot b_{\min} < \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}], vF[v]} < m \cdot b_{\max} \quad (3.31)$$

ここで  $m$  は同行同列以外の発火ニューロンから受ける抑制の数を表し，また  $b_{\max}$  ,  $b_{\min}$  はコスト行列の成分の最大値・最小値をそれぞれ表す．この領域条件より，式 (3.30) は以下のように変形される．

$$\xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]} < \frac{m \cdot b_{\min} (-B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{\mathbf{x}}))}{2A + 2m \cdot b_{\max} (-B + 6Cc_{\text{sol}}(\hat{\mathbf{x}}))} \quad (3.32)$$

この時、式 (3.32) の右辺について、極小値状態  $\hat{x}$  のコスト値による大小関係を見積もる。極小値状態を、そのコストの大きさ順に  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots$  とすると、

$$\begin{aligned} & \frac{m \cdot b_{\min}(-B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_{n+1}))}{2A + 2m \cdot b_{\max}(-B + 6Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_{n+1}))} - \frac{m \cdot b_{\min}(-B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_n))}{2A + 2m \cdot b_{\max}(-B + 6Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_n))} \\ &= \frac{6m \cdot b_{\min}AC(c_{\text{sol}}(\hat{x}_{n+1}) - c_{\text{sol}}(\hat{x}_n))}{\{2A + 3m \cdot b_{\max}(B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_{n+1}))\} \{2A + 3m \cdot b_{\max}(B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_n))\}} > 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

が成り立つ。このことから極小値状態のコスト  $c_{\text{sol}}(\hat{x})$  が小さいほど式 (3.32) の右辺は小さくなる。したがって、式 (3.28) を満たすような極小値状態の中で最もコストが小さい状態を  $\hat{x}_1$  とすると、式 (3.32) より以下が成り立つ。

$$\xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]} < \frac{m \cdot b_{\min}(-B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_1))}{2A + 2m \cdot b_{\max}(-B + 6Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_1))} \quad (3.34)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} x_{\hat{u}, F[\hat{u}]} &= 1 - \xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]} \\ &> 1 - \frac{m \cdot b_{\min}(-B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_1))}{2A + 2m \cdot b_{\max}(-B + 6Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_1))} \end{aligned} \quad (3.35)$$

となり、この式は安定して存在できない極小値状態中の、発火ニューロンの出力の下限值を表していることが分かる。したがって、安定して存在する極小値状態中の発火ニューロン  $(\bar{u}, F[\bar{u}])$  の出力の上限値は以下で表される。

$$\begin{aligned} x_{\bar{u}, F[\bar{u}]} &= 1 - \xi_{\bar{u}, F[\bar{u}]} \\ &\leq \frac{m \cdot b_{\min}(-B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_1))}{2A + 2m \cdot b_{\max}(-B + 6Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_1))} \end{aligned} \quad (3.36)$$

全ての極小値状態を確実に不安定化するためには、出力空間の頂点以外の空間に安定して存在しうる極小値状態の発火ニューロンを全て負性抵抗領域で覆えばよい。よって式 (3.36) より、確実に極小値状態を不安定化するための負性抵抗領域の幅は以下のように見積もられる。

$$L > \frac{m \cdot b_{\min}(-B + 4Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_1))}{2A + 2m \cdot b_{\max}(-B + 6Cc_{\text{sol}}(\hat{x}_1))} \quad (3.37)$$

式 (3.37) は極小値状態を負性抵抗の効果を用いて不安定化するための必要条件であり、各行各列で 1 つニューロンを発火させるための条件 (式 (3.18))、最適解の平衡点を出力空間の頂点に集める条件 (式 (3.21))、そして極小値状態を不安定化するための負性抵抗領域の条件 (式 (3.37)) の 3 つが満足されれば、ネットワーク状態が静止時に最適解のみが得られることが保証されている。式 (3.37) 中に含まれる係数  $m$  は問題によって変化する。TSP の場合は問題の大きさに寄らず  $m = 2$  で固定されるため、必要な負性抵抗領域の幅は問題サイズに依存しない。一方 QAP の場合では  $m$  が問題の大きさに依存するため、必要な負性抵抗領域の幅もまた問題サイズに依存する。



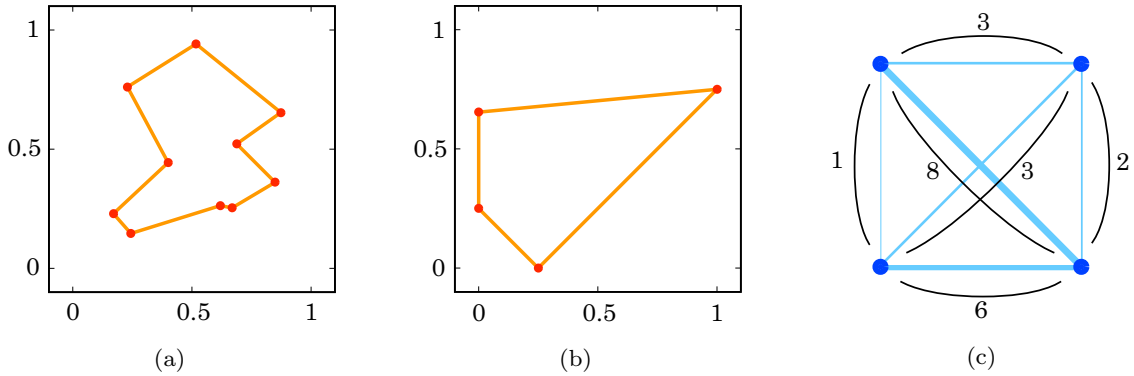


図 3.5 数値シミュレーションで使した 10 都市 TSP, 4 都市 TSP と 4-QAP. (a) は Hopfield の 10 都市問題を, また (b) は 4 都市問題を表している. また 4-QAP については, 距離行列が (b), 流量行列が (c) により表される.

### 3.4 数値シミュレーションによる解探索性能の検証

ここまで述べてきた HC-ID ネットワークの解探索性能について, ここで数値シミュレーションにより検証を行う. なお本節では例題として図 3.5 に示す 10 都市 TSP, 4 都市 TSP 及び 4-QAP を用いた. また HC-ID ネットワークの更新には 4 次の Runge-Kutta 法を用いた.

#### 3.4.1 極小値状態の平衡点位置

最初に数値シミュレーションにより極小値状態の平衡点分布を調べる. ここではパラメータ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を式 (3.18) や式 (3.21) にしたがって最適解のみが出力空間の頂点で安定になるように設定した場合の, 極小値状態での発火ニューロンの平衡点分布を調べた.

まず, Hopfield の 10 都市問題におけるシミュレーション結果を図 3.6 に示す. この図において横軸は出力の値を, また縦軸は出現確率を表し, 青で描かれた棒が極小値状態における発火ニューロンのうち, 最小のニューロンの出力分布を示している. また破線は式 (3.36) により得られた, 最小発火ニューロンの平衡点における上限値の理論値を示している. この結果より, 数値実験により得られた最小発火ニューロンの平衡点が, 理論値より小さい領域に分布していることが分かる. したがってこの場合, 式 (3.37) にしたがって負性抵抗領域を設定することで極小値状態の発火ニューロンを不安定化することができる.

次に, 図 3.7 に極小値状態を不安定化するのに必要な負性抵抗領域の幅  $L$  のパラメータ  $B/4C$  依存性を示す. この図において横軸は  $B/4C$  を, また縦軸は必要な負性抵抗領域の幅を示す. 実線で示した線は数値実験により得られた, 必要とされる  $L$  の大きさである. これは極小値状態における最小発火ニューロンの平衡点の最大値をプロットすることで得られた. また破線は式 (3.37) により得られた理論値である.  $B/4C$  が最適化のみを出力空間の頂点で安定にするための条件 (式 (3.21)) を満たす範囲では, 極小値状態を不安定化するのに必要な  $L$  は TSP・QAP 共に理論値がシミュレー

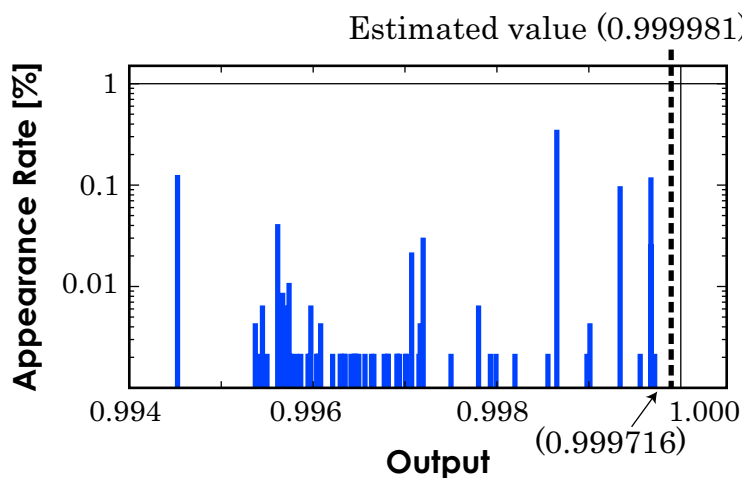
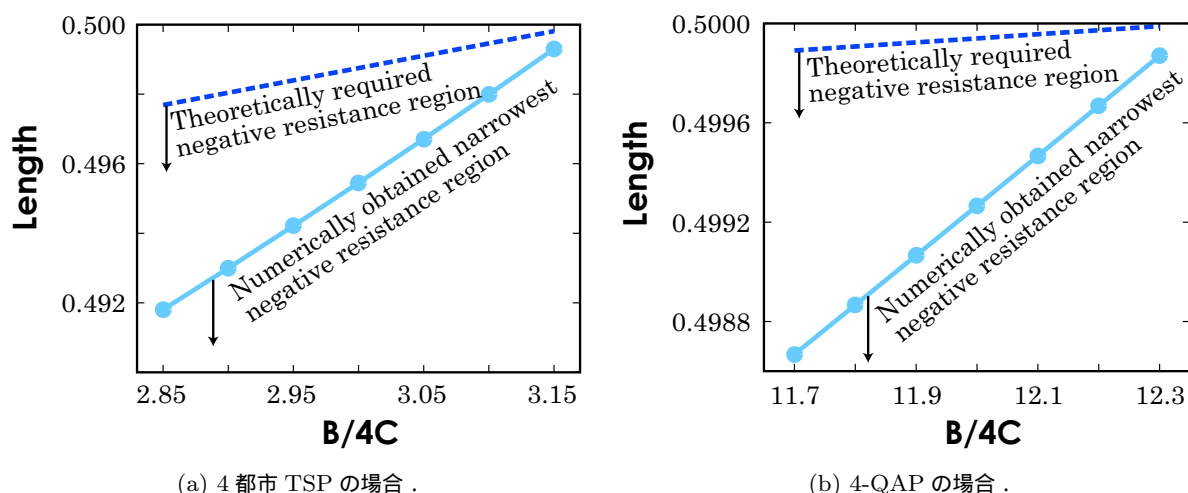


図 3.6 最小値状態における最も出力の小さい発火ニューロンの平衡点分布．問題は図 3.5(a) に示す 10 都市問題を用いた．パラメータは  $A = 16.465$ ,  $B = 1.088$ ,  $C = 0.10$ ．この時，シミュレーション結果より得られた出力最小の発火ニューロンの平衡点は  $x = 0.999716$ ，式 (3.36) による見積もり値は  $x = 0.999981$  であった．



(a) 4 都市 TSP の場合．

(b) 4-QAP の場合．

図 3.7 極小値状態を不安定化するのに必要な負性抵抗領域の幅の  $B/4C$  依存性．パラメータは (a) では  $A = 9.12$ ,  $C = 0.10$ , (b) では  $A = 405.71$ ,  $C = 0.10$ ．いずれの問題でも  $C$  を固定し  $B$  を  $B/4C$  の値に応じて変更した．

シミュレーション結果を上回っている．このことから， $B/4C$  が変化しても式 (3.37) にしたがって負性抵抗領域の幅を設定すれば，静止状態で最適解のみを得られることが分かる．これらの結果から，式 (3.37) により見積もられた，必要な負性抵抗領域の幅が妥当であることが確認できた．

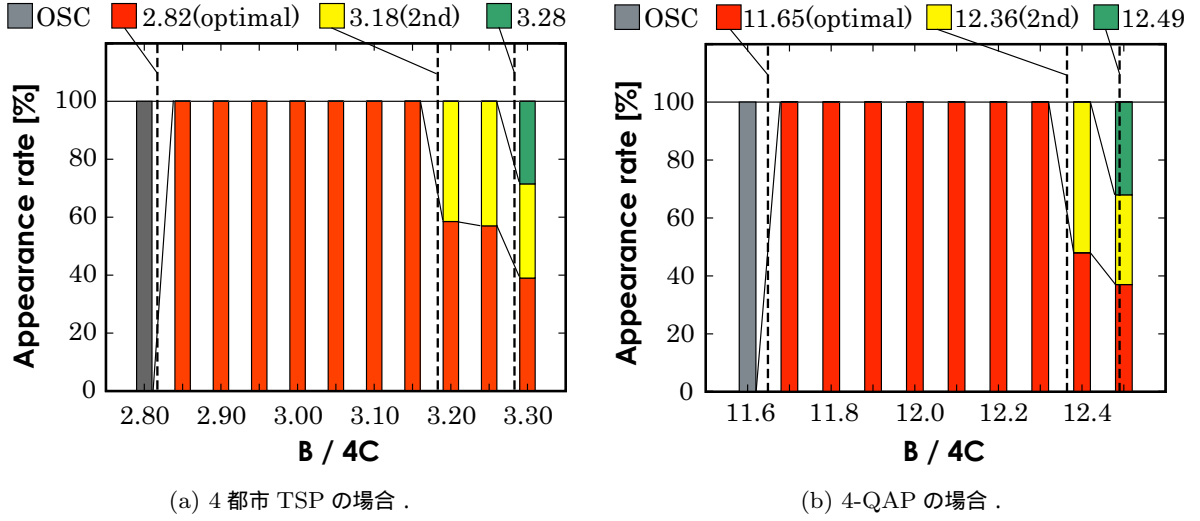


図 3.8 パラメータ  $B/4C$  と出現する解状態の関係．‘OSC’ は定常的な振動状態を示す．ネットワークパラメータは (a) では  $\alpha = 4.0, \beta = 200.0, \tau_x/\tau_u = 0.10$ , (b) では  $\alpha = 20.0, \beta = 2000.0, \tau_x/\tau_u = 0.10$  とした．

### 3.4.2 パラメータ $B/4C$ と出現する解状態の関係

次に、パラメータ  $B/4C$  の値を変化させた時の、ネットワークが静止した時に出現する解状態の出現率の変化を調べた．図 3.5(b), 3.5(c) に示す 4 都市 TSP・4-QAP の解探索を行った結果を図 3.8 に示す．この図において横軸は  $B/4C$  の値、縦軸は出現する解状態の出現率を示す．グラフは各解状態のコスト値によって色分けされており、各状態のコスト値はグラフの上に示されている．ただし‘OSC’ は継続的な振動状態を表す．エネルギー関数のパラメータは  $C$  を固定し、 $B$  を  $B/4C$  の値にしたがって変化させた．また  $A$  は式 (3.18) を満足するように設定した．TSP の結果 (図 3.8(a)) を詳しく見てみる．例えば  $B/4C = 3.20$  の場合、出現する状態はコスト値が 2.82 と 3.18 の状態の 2 種類である．これらは共にコスト値が  $B/4C$  よりも小さいため、解状態として出現しうる．一方、 $B/4C$  よりもコスト値が大きい状態 ( $c_{\text{sol}} = 3.28$  の状態) は安定して出現することはない．このことから、 $B/4C$  の値よりもコスト値が小さい解状態のみが静止状態で得られていることが分かる．また  $B/4C$  の値が最適解のコストよりも小さくしてしまうと、ネットワーク状態は静止状態に到達することができず、振動状態となってしまう．

また 4-QAP 解探索を行った際のネットワークの出力波形の時間変化を図 3.9 に示す．ここで図 3.9(a) は振動状態のみ得られるパラメータ値 ( $B/4C = 11.60$ ) の時の定常状態の波形を、また図 3.9(b) は最適解のみ得られるパラメータ値 ( $B/4C = 11.70$ ) の時の遷移過程の波形を表している．振動状態では、各ニューロンが一斉に振動した後、最もコスト値の小さい解状態 ( $c_{\text{sol}} = 11.65$ ) で一時的に静止する．しかしこの状態も不安定であるため、しばらくするとネットワーク状態は不安定化され、再び振動状態に戻ってしまう．このように、振動状態と安定状態を不定期に繰り返す、特徴的な波形が得られた．また解探索中の遷移過程の波形においても、定常的な振動状態の場合と同様の、

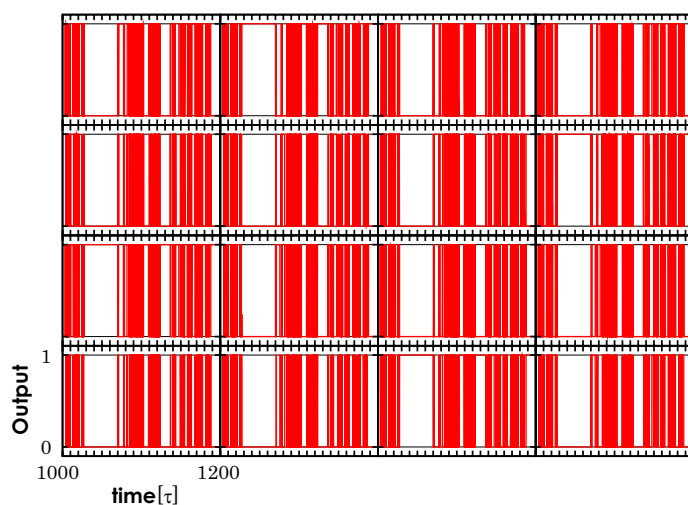
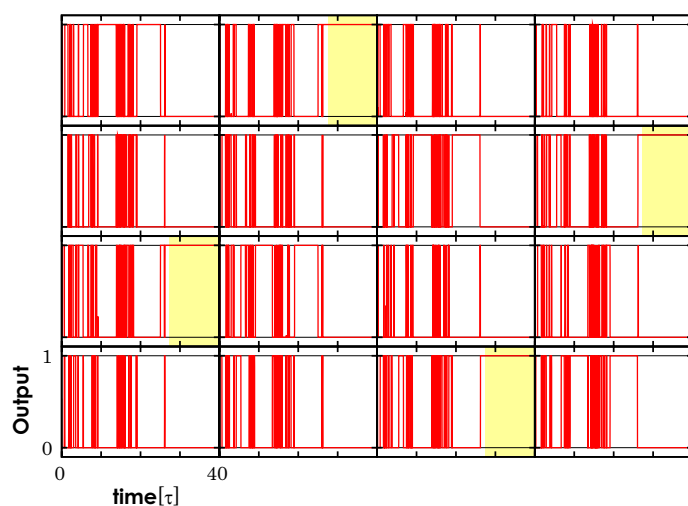
(a)  $B/4C = 11.60$  の時の定常状態の出力(b)  $B/4C = 11.70$  の時の遷移過程の出力．

図 3.9 4-QAP 解探索時の HC-ID ネットワークの出力の時間変化波形．1 つのセルが 1 つのニューロンの出力波形を示す．また黄色で染めた部分はネットワーク状態が静止していることを表す．

一斉振動と静止を繰り返すような波形が得られている．

### 3.4.3 ネットワーク状態の解探索中におけるカオス性

図 3.9 に示したように、HC-ID ネットワークのニューロン出力には振動と静止を不定期に繰り返すような特徴的な時間変化が見られた．このことから、HC-ID ネットワークのダイナミクス中にはカオス的なダイナミクスが含まれている可能性がある．ここではニューロン出力の時間変化のデータを基に、HC-ID ネットワークのダイナミクス中にカオス性があるかどうかを調べる．

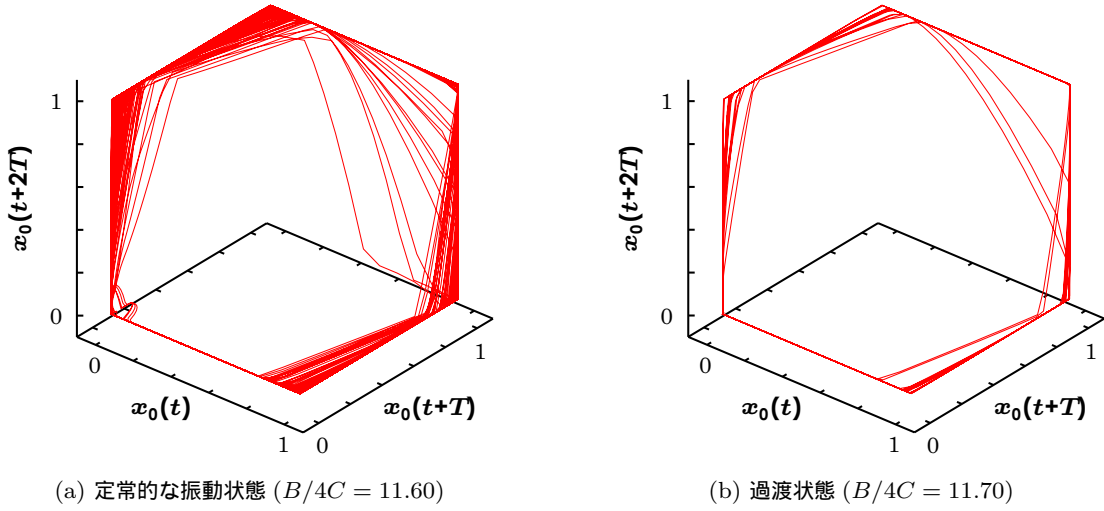


図 3.10 あるニューロンの出力波形 (図 3.9) から再構成されたアトラクタ.  $T = 0.01\tau$  とし, サンプルングレートは  $0.001\tau$  とした.

カオスとは決定論的力学系にみられる, 不規則でかつ複雑な軌道を示す特性の総称である [32, 33]. カオス的なダイナミクスは非線形性が強い系の多くで観測されており, 生体の神経細胞における膜電位の変化などでも観測されている. このことから, 生物活動に伴う複雑な情報処理や制御に, カオスが重要な役割を果たしているのではないかと推測されてきた [32]. またニューロンモデルにおいても, カオス的なダイナミクスを積極的に活用し, 組合せ最適化問題の解探索をはじめとするいくつかの情報処理の性能を向上させたカオスニューラルネットワークが提案されている [3]. カオス的なダイナミクスの特徴の一つは系の時間変化をプロットした際, 非周期的なアトラクタが出現することである. これはストレンジアトラクタと呼ばれるアトラクタであり, ストレンジアトラクタの有無は系のダイナミクス中にカオス的な要素が含まれるかどうかを判断する 1 つの材料となる. ここでは, HC-ID ネットワークの解探索中のダイナミクスのカオス性を調べるために, 図 3.9 に示した出力波形の内, 1 つのニューロンの出力の時間変化を取り出し, 遅延座標を用いてアトラクタを再構成した. ある観測によって得られた時系列  $z_t \in \mathbf{R}^1$  に対して, 遅延座標  $y$  は以下の式で定義される [33].

$$y := (z_t, z_{t-T}, z_{t-2T}, \dots, z_{t-d(T+1)}) \in \mathbf{R}^d \quad (3.38)$$

本研究では  $d = 3$  とした遅延座標系埋め込み法 (Delay Coordinate Embedding) によりアトラクタを再構成した. 得られたアトラクタを図 3.10 に示す. 結果より, 再構成されたアトラクタは定常的な振動状態でも過渡状態でもストレンジアトラクタを構成することが分かる. このことから, HC-ID ネットワークにはカオス的なダイナミクスが含まれており, これが解探索に対してなんらかの影響を及ぼしている可能性があることが分かった.

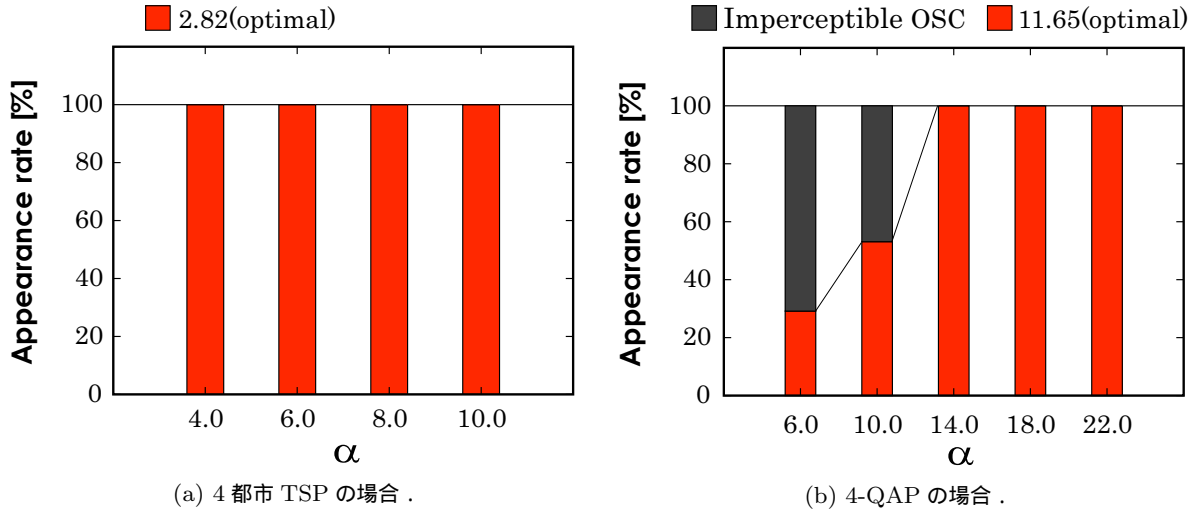


図 3.11 パラメータ  $\alpha$  による出現するネットワーク状態の変化 . パラメータは (a) では  $A = 9.12$ ,  $B = 2.90$ ,  $C = 0.10$ ,  $\beta = 200.0$ ,  $\tau_x/\tau_u = 0.1$ , (b) では  $A = 405.71$ ,  $B = 11.7$ ,  $C = 0.10$ ,  $\beta = 2000.0$ ,  $\tau_x/\tau_u = 0.1$ .

#### 3.4.4 パラメータ $\alpha$ による解探索性能への影響

最後に,  $g$  関数のパラメータである  $\alpha$  を変化させた時の解探索性能への影響について調べる. ここでは最適解のみが静止状態で得られるよう, 式 (3.18) および式 (3.21) にしたがってエネルギー関数のパラメータ  $A, B, C$  を決定した. また負性抵抗領域の幅が極小値状態を不安定化するのに十分な幅を確保できるように, 式 (3.37) を満たす範囲で  $\alpha$  を変化させた ( $\beta$  は固定値とした). この時のネットワーク状態の出現率を図 3.11 に示す. 図 3.11(a) は 4 都市 TSP での, 図 3.11(b) では 4-QAP での結果をそれぞれ示している. 4 都市 TSP では  $\alpha$  の値に関わらず 100% 最適解が得られている. それに対して, 4-QAP では  $\alpha$  の値が小さい場合, 微小な振動状態に陥ってしまい解探索がうまくできない場合があることが分かった. この微小な振動状態に陥った時のニューロンの出力波形例を図 3.12 に示す. 微小な振動状態では, ネットワークは極小値状態の近傍で微小な振動を起こすが, 極小値状態のベイスンから抜け出すことはできない. これは  $\alpha$  が小さいために負性抵抗の強さが小さく, 極小値状態のベイスンから抜け出せなくなっていると考えられる. ただし状態は負性抵抗領域内に含まれているため, 極小値状態で安定になることもなく, ネットワーク状態は微小な振動を維持している. このことから, 負性抵抗領域の設定には, 式 (3.37) にしたがって領域の幅を設定するだけでなく, 極小値状態のベイスンから抜け出せるだけの強さを考慮する必要があることが分かった.

### 3.5 まとめ

本章では ID ネットワークに高次結合を導入した高次結合逆関数遅延 (HC-ID) ネットワークを提案した. 3 次までの高次結合を導入することで, ID ネットワークのエネルギー関数を 4 次形式のエ

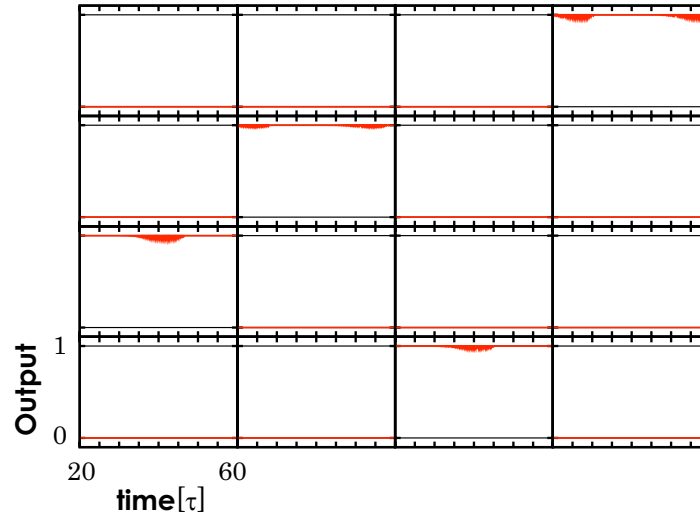


図 3.12 4-QAP において、微少な振動状態に陥った場合の出力波形例．( $\alpha = 6.0$ )

エネルギー関数に拡張した．また TSP や QAP などの組合せ最適化問題の解探索を実装するための、汎用的な 4 次形式のエネルギー関数を設計した．HC-ID ネットワークに得られたエネルギー関数を適用することで、TSP や QAP などの解探索においてネットワーク状態が静止した時に得られる解状態を、その解のコストの値によって選択できることを示し、それに必要なパラメータ条件 (式 (3.18), 式 (3.20)) を導出した．これにより、4 次形式のエネルギー関数を導入することで最適解の平衡点のみを出力空間の頂点に集め、それ以外の状態の平衡点と分離できることを示した．次に、全ての極小値状態のみを不安定化するのに必要な負性抵抗領域の幅を見積もり、ネットワークパラメータの設定条件 (式 (3.37)) を導出した．これらの条件にしたがってパラメータを設定することで、ネットワーク状態静止時に 100% 最適解が得られることを数値実験により確認した．最後に HC-ID ネットワークのダイナミクスについてニューロンの出力の時系列データを基に解析し、カオス的なダイナミクスが含まれていることを確認した．

これら本章での議論により、高次結合を持つ ID ネットワークが組合せ最適化問題の解探索に対して非常に有効であることを示した．



## 4 高次結合ネットワークによる汎用解探索システム

前章では HC-ID ネットワークを提案し、また TSP や QAP の解探索に適用するための 4 次形式のエネルギー関数を定義した。そこで本章では、HC-ID ネットワークによる組合せ最適化問題解探索システムについて、より汎用性のあるシステムへと拡張する。まず、HC-ID ネットワークを基により簡素な高次結合ネットワークを導出し、より大きな規模の問題への適用を目指す。またより実用的な問題の一つとしてスケジューリング問題を取り上げ、4 次形式のエネルギー関数の汎用性拡充を目指す。

### 4.1 HC-ID ネットワークの簡素化

HC-ID ネットワークはパラメータの値によって得られる解のコストを制限できる、強力な組合せ最適化問題解探索ツールである。しかし、数値シミュレーションによる HC-ID ネットワークの実装では計算時間が非常に長くなってしまふ。これは高次結合を導入したことで、積和演算数が問題サイズに対して指数関数的に増加するためであり、具体的には、ネットワーク中のニューロン数  $n$  に対してシナプス数は  $O(N^4)$  で増加してしまふ。また HC-ID ネットワークは連続時間系であるため、数値シミュレーションによる実装では微分方程式を解かなければならない。これらのことから、規模の大きな問題に適用する場合、数値シミュレーションで HC-ID ネットワークを実装することは現実的ではない。

そこで本節では、HC-ID ネットワークを簡素化するため、時間離散ダイナミクスの導入や出力の 2 値化を行う。まず、時間離散 HC-ID ネットワークを導出する。更新ダイナミクスを時間離散化することで、数値シミュレーションでの計算時間を短縮できる可能性がある。また HC-ID ネットワークの出力について、0/1 の 2 値に制限した場合についても検討する。3 章での議論より、最適解の状態はネットワークの出力空間の頂点に存在しており、最適解を得るためには負性抵抗領域の幅を 0.5 に近づける必要がある。このため、HC-ID ネットワークの出力を 0/1 の 2 値に制限しても、解探索のダイナミクスには大きな差が生じず、より簡単に最適解を探索できる可能性がある。また出力を 2 値化することで、さらに大きなネットワークをデジタル回路などで実現する際の取り扱いが容易になる利点も考えられる。ここでは離散時間 HC-ID ネットワークの出力を 2 値化し、連続値出力の



離散時間 HC-ID ネットワークと比較する．

#### 4.1.1 離散時間モデルの導出

まず，HC-ID ネットワークを Euler 法により離散時間化すると，以下の基本式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\tau_u}{\Delta} \left( u_i(t+1) - u_i(t) \right) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N w_{ijkl} x_j(t) x_k(t) x_l(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} x_j(t) x_k(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t) + h_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{\tau_x}{\Delta} \left( x_i(t+1) - x_i(t) \right) = u_i(t) - g(x_i(t)) \quad (4.2)$$

ここで  $\Delta$  は時間刻みを表す．さらに  $\Delta = \tau_u$  とすると，

$$\begin{aligned} u_i(t+1) &= u_i(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N w_{ijkl} x_j(t) x_k(t) x_l(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} x_j(t) x_k(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t) + h_i \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \frac{\tau_u}{\tau_x} \left( u_i(t) - g(x_i(t)) \right) \quad (4.4)$$

が得られる．これは従来の離散時間 ID モデルの分類上では  $\tau_u$  モデルに相当する [34]．以下の議論ではこのモデルを離散時間 HC-ID モデルとして取り扱う．このとき，式 (4.3)，式 (4.4) を 1 変数化すると，以下の式が得られる．

$$\frac{\tau_x}{\tau_u} \left( x_i(t+2) - 2x_i(t+1) - x_i(t) \right) + \eta(x_i) \left( x_i(t+1) - x_i(t) \right) = - \frac{\partial U_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x}(t))}{\partial x_i(t)} \quad (4.5)$$

ここで，

$$\eta(x_i) = \frac{g(x_i(t+1)) - g(x_i(t))}{x_i(t+1) - x_i(t)} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x}) &= - \frac{1}{4} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l w_{ijkl} x_i x_j x_k x_l - \frac{1}{3} \sum_i \sum_j \sum_k w_{ijk} x_i x_j x_k \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j w_{ij} x_i x_j - \sum_i x_i h_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

である．式 (4.5) を従来の連続時間モデルの 1 変数化した式 (3.3) と比較すると， $\tau_u = 1$  の場合，離散時間 HC-ID モデルのダイナミクスは従来の HC-ID モデルのダイナミクスを時間離散化したものになっていることが分かる．このことから，離散時間 HC-ID ネットワークにおいても従来の HC-ID ネットワークと同様のダイナミクスが期待できる．また離散時間 HC-ID ネットワークにおいても，

内部状態の発散を抑えるため以下のダイナミクスを導入する．

$$\theta_i(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N w_{ijkl} x_j(t) x_k(t) x_l(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} x_j(t) x_k(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t) + h_i \quad (4.8)$$

$$u_i(t+1) = \begin{cases} u_i(t) & \text{if } (x_i(t) \sim 0 \text{ and } \theta_i(t) < 0) \text{ or } (x_i(t) \sim 1 \text{ and } \theta_i(t) > 0) \\ u_i(t) + \theta_i(t) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.9)$$

これにより，従来の HC-ID ネットワークと同様に，出力の境界において以下のようなダイナミクスが期待できる．

$$-\frac{\partial U_{\text{HC-ID}}}{\partial x} \begin{cases} \leq 0 & \text{ならば安定} \\ > 0 & \text{ならば不安定} \end{cases} \quad (4.10)$$

$$-\frac{\partial U_{\text{HC-ID}}}{\partial x} \begin{cases} \geq 0 & \text{ならば安定} \\ < 0 & \text{ならば不安定} \end{cases} \quad (4.11)$$

#### 4.1.2 離散時間ネットワークの更新法

離散時間のダイナミクスを導入したことで，ネットワークの更新法には同期更新と非同期更新の 2 種類が考えられる．同期更新は連続時間モデルの更新法に対応した更新方法である．全てのニューロンが並列して更新されるため，ハードウェアに実装した場合には完全に並列的に状態更新を行うことができる．しかし一部のニューロンの状態が同期してしまった場合，同期更新ではネットワークがリミットサイクルにトラップされ，そこから出られなくなる可能性がある．一方，非同期更新にはニューロンの更新順序の決め方が 2 通りある．一つは更新順を固定する方法，もう一つは更新する毎にランダムに変更する方法である．どちらの方法でも，非同期更新ではリミットサイクルから抜け出せる可能性がある．

#### 4.1.3 離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの導出

次に出力の 2 値化について考える．そのために，ここでは従来の ID ネットワークで提案されている極限モデル [35] を HC-ID ネットワークに導入する．極限モデルは，パラメータ  $\beta \rightarrow \infty$  および  $\tau_x/\tau_u \rightarrow 0$  の極限を考えたモデルである． $\beta$  を無限大まで大きくすることで，式 (2.13) に示したように負性抵抗領域が  $x = 0, 1$  以外の中間値全体に広がる．これにより，ネットワーク状態は出力空間の頂点以外の状態では静止することができなくなる．また  $\tau_x/\tau_u$  を無限に小さくすることで，内部状態の変化に対して出力が時間遅れなく変化ようになる．これにより，ネットワーク状態は出力が中間値を取るような状態を無限の速度で通過し，出力状態が瞬時に 0 または 1 に到達ようになる [35]．これらのことから，極限モデルの導入により出力更新式 (3.1) と  $g$  関数は以下のように変化

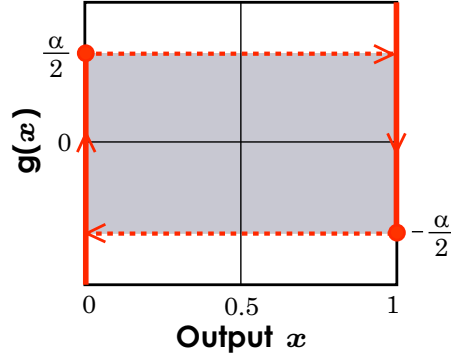


図 4.1  $\beta \rightarrow \infty, \tau_x \rightarrow 0$  条件下での  $g$  関数 .

する .

$$x_i = g^{-1}(u_i), \quad (4.12)$$

$$g^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & \text{if } u < -\alpha/2 \\ 1 & \text{if } u > \alpha/2 \\ \text{no change} & \text{otherwise} \end{cases} . \quad (4.13)$$

またこの時の  $g$  関数を図 4.1 に示す . 式 (4.13) より ,  $g$  関数はヒステリシス特性を持っていることが分かる . したがって得られたネットワークは高次結合を導入したヒステリシスネットワーク [5] であると考えられる . そこで 2 値化して得られた高次結合ネットワークを , 高次結合ヒステリシスネットワーク (HC-ヒステリシスネットワーク) と呼ぶ . さらに式 (4.12) , 式 (4.13) , 式 (4.3) より , 離散時間 HC-ヒステリシスネットワークは以下のように導出される .

$$\begin{aligned} \theta_i(t) = & \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N w_{ijkl} x_j(t) x_k(t) x_l(t) \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} x_j(t) x_k(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t) + h_i \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$u_i(t+1) = \begin{cases} u_i(t) & \text{if } (x_i(t) \sim 0 \text{ and } \theta_i(t) < 0) \text{ or } (x_i(t) \sim 1 \text{ and } \theta_i(t) > 0) \\ u_i(t) + \theta_i(t) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.15)$$

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 0 & \text{if } u_i(t+1) < -\alpha/2 \\ 1 & \text{if } u_i(t+1) > \alpha/2 \\ x_i(t) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.16)$$

#### 4.1.4 数値シミュレーションによる解探索性能の比較

ここでは , 離散時間 HC-ID ネットワークおよび離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの解探索性能について , 数値シミュレーションにより検証する . また同期更新と非同期更新 , 2 つの更新法による解探索性能の変化についても調べる . なお以下の結果は , いずれも図 3.5 に示す 4-QAP の解探索を行った結果である .

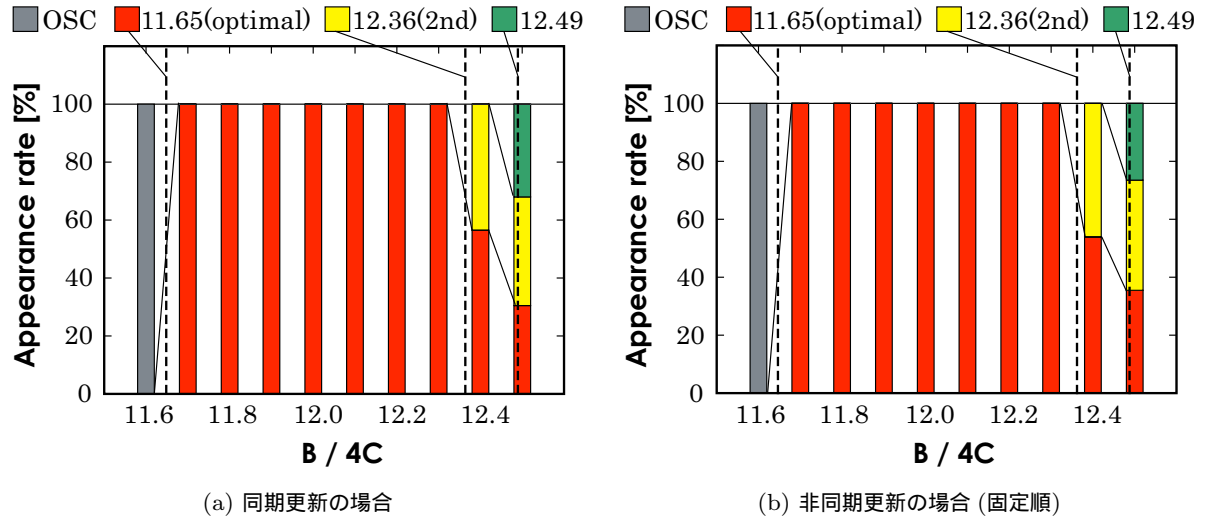


図 4.2 離散時間 HC-ID ネットワークによる 4-QAP 解探索における，パラメータ  $B/4C$  と出現する解状態の関係．‘OSC’ は継続的な振動状態を示す．ネットワークパラメータは  $\alpha = 20.0$ ， $\beta = 2000.0$ ， $\tau_u = 1.0$ ， $\tau_x = 0.1$ ．

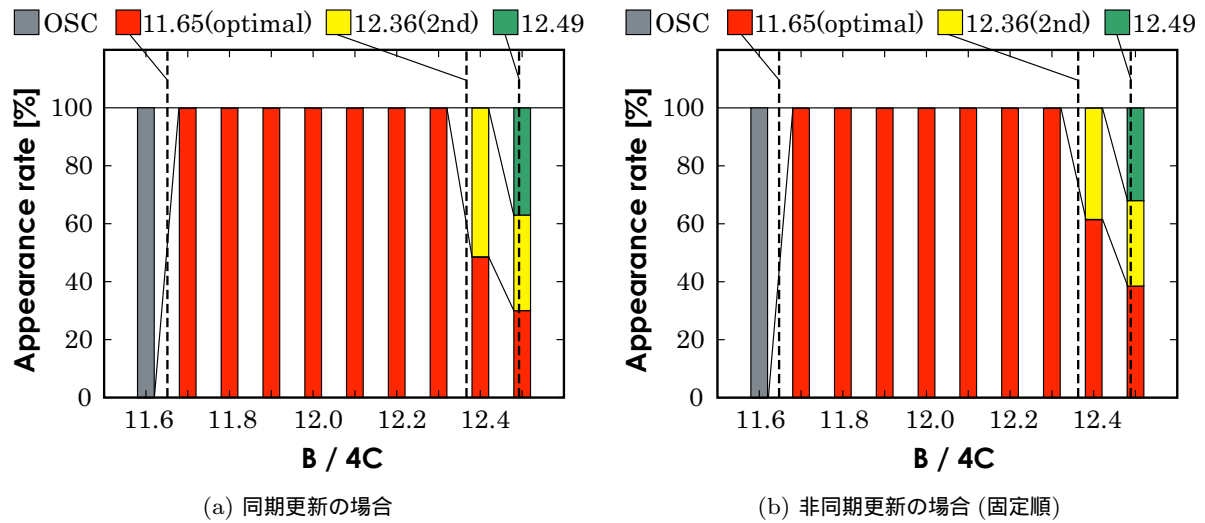


図 4.3 離散時間 HC-ヒステリシスネットワークによる 4-QAP 解探索における，パラメータ  $B/4C$  と出現する解状態の関係．‘OSC’ は継続的な振動状態を示す．ネットワークパラメータは  $\alpha = 20.0$ ， $\tau_u = 1.0$ ．

まず，パラメータ  $B/4C$  に対する解出現率の変化を調べた．図 4.2 は離散時間 HC-ID ネットワークにおける出現解状態のパラメータ依存性を示している．同期更新の場合・非同期更新の場合共に従来の HC-ID ネットワークと同様に， $B/4C$  の値に応じて出現する解状態をそのコストにより切り分けることができる．また図 4.3 は離散時間 HC-ヒステリシスネットワークのパラメータ  $B/4C$  に対する解出現率の変化を示している．これらの場合でも，離散時間 HC-ID ネットワークと同様の

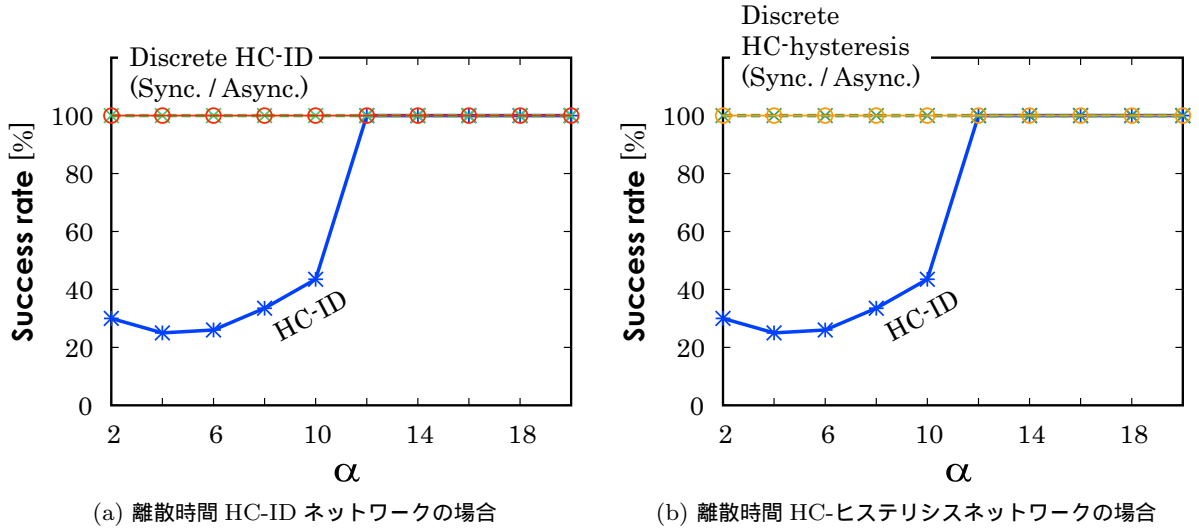


図 4.4 離散時間 HC-ID ネットワークおよび離散時間 HC-ヒステリシスネットワークによる 4-QAP 解探索における、最適解出現率の  $\alpha$  依存性。エネルギー関数のパラメータは  $A = 405.71$ ,  $B/4C = 11.7$ 。またネットワークパラメータは (a) では  $\beta = 2000.0$ ,  $\tau_x/\tau_u = 0.10$ , (b) では  $\tau_u = 1$  とした。それぞれのグラフに描かれた HC-ID ネットワークの結果は図 3.11(b) の結果である。

結果が得られた。これらの結果から、離散時間・2 値出力共に  $B/4C$  による出現解の選択には影響を与えないことが分かった。

次に最適なエネルギー関数のパラメータ下での  $\alpha$  を小さくしたときの最適解到達率を調べた。図 4.4(a) は離散時間 HC-ID ネットワークの、また図 4.4(b) は離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの結果をそれぞれ示している。ここで、 $A$  と  $B/4C$  は最適解のみが得られるように設定した。HC-ID ネットワークでは  $\alpha$  が小さいと最適解が得られないことがあったが、離散時間 HC-ID ネットワークや離散時間 HC-ヒステリシスネットワークでは同期更新・非同期更新共に  $\alpha$  を小さくしても最適解が得られている。これは離散時間のダイナミクスにより、一回の更新に伴う状態の変化量が増えたことで、極小値状態のベイスンから抜け出せるようになったためだと考えられる。

図 4.5 は離散時間 HC-ID ネットワークおよび離散時間 HC-ヒステリシスネットワークについて、収束時間の  $\alpha$  依存性の変化を示している。この数値シミュレーションにおいて、離散時間 HC-ID ネットワークの  $\alpha$  は式 (3.37) にしたがって極小値状態を全て不安定化できるように設定した。またパラメータ  $A$  や  $B/4C$  は最適解のみが得られるように設定し、さらにネットワークの更新法を変えたときの収束時間の変化についても同時に調べた。図 4.5(a) に示した離散時間 HC-ID ネットワークの場合、同期更新・非同期更新共に  $\alpha = 200$  付近で探索時間が最短となる。これは  $\alpha$  が大きいと状態遷移に時間がかかり、逆に  $\alpha$  が小さいと特定のリミットサイクルから脱出するのに時間がかかるためだと推定される。また  $\alpha$  が小さい領域では、非同期更新の方が収束時間が短くなることが分かった。一方、図 4.5(b) に示した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの場合では同期更新と非同期更新で収束時間の  $\alpha$  依存性が大きく異なる。同期更新の場合は離散時間 HC-ID ネットワークの場合

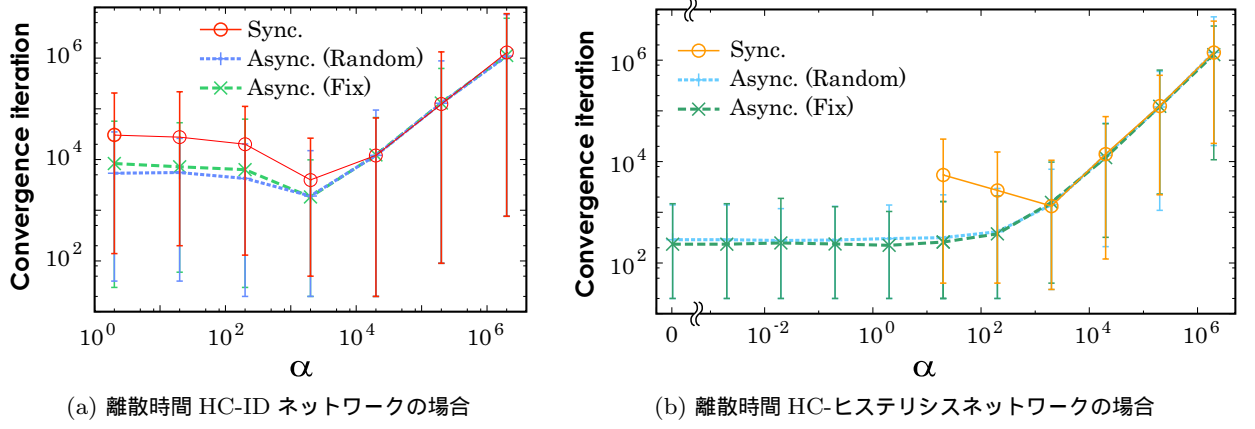


図 4.5 離散時間 HC-ID ネットワークおよび離散時間 HC-ヒステリシスネットワークによる 4-QAP 解探索における、収束時間の  $\alpha$  依存性．‘Sync.’，‘Async.(Random)’，‘Async.(Fix)’ はそれぞれ同期更新，非同期更新（ランダム順），非同期更新（固定順）を表している．パラメータは  $A = 405.71$ ， $B/4C = 11.7$ ．またネットワークパラメータは (a) では  $\beta = 2000.0$ ， $\tau_x/\tau_u = 0.10$ ，(b) では  $\tau_u = 1$  とした．

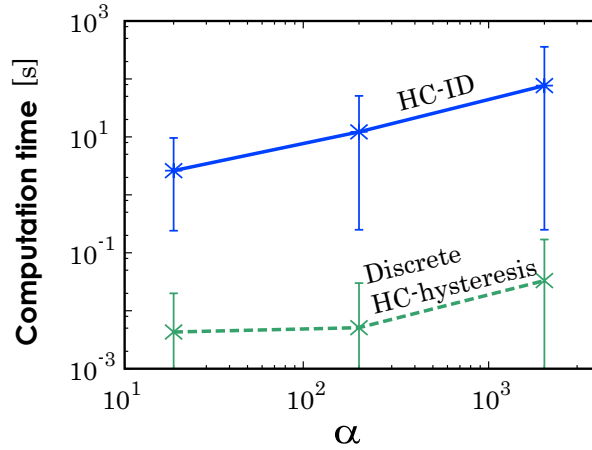


図 4.6 離散時間 HC-ヒステリシスネットワークと HC-ID ネットワークにおける、数値シミュレーションによる計算時間の  $\alpha$  依存性． $\alpha$  は  $20 \leq \alpha \leq 2000$  の間で変化させた．また離散時間 HC-ヒステリシスネットワークは非同期更新（固定順）による．エネルギー関数のパラメータは  $A = 405.71$ ， $B/4C = 11.7$ ．また HC-ID ネットワークでは  $\beta = 2000.0$ ， $\tau_x/\tau_u = 0.10$ ．離散時間 HC-ヒステリシスネットワークでは  $\tau_u = 1$ ．

と同様， $\alpha = 200$  付近で探索時間が最短となる．これに対して非同期更新では， $\alpha$  を小さくするにつれて収束時間も短くなり， $\alpha = 20$  以下ではほとんど変化しない．また  $\alpha = 0$  においても，非同期更新では十分に短い収束時間で解が得られている．このことから，非同期更新の離散時間 HC-ヒステリシスネットワークではパラメータ  $\alpha$  の調整の必要がないことが分かる．さらに離散時間 HC-ID ネットワークと離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを比較すると，同期更新・非同期更新共に，出力を 2 値化した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの方が収束時間が短くなっている．このこと

から，HC-ID ネットワークを離散時間化・出力 2 値化した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを用いることで，より短い時間で解探索を行えることが分かる．

最後に，数値シミュレーションによる計算時間の違いを HC-ID ネットワークと非同期更新の離散時間 HC-ヒステリシスネットワークで比較した．それぞれのネットワークは C++ 言語によるシングルスレッドプログラミングにより実装され，Intel コンパイラを用いてコンパイルした．またシミュレーションに用いた計算機のプロセッサは Intel Core i7 processor (3.33GHz) CPU，メモリ容量は 8 コア共用で 12GB であった．この時の計算時間の  $\alpha$  依存性を図 4.6 に示す．結果より，離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの方が HC-ID ネットワークに比べ 10 倍以上高速に計算が行えることが分かる．これより，離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの方がより大規模な問題を取り扱えると考えられる．

## 4.2 学位審査会スケジューリング問題への適用

スケジューリング問題は組合せ最適化問題の中でも特に解探索への社会的需要が指摘されている問題である [36]．スケジューリング問題は大きく，勤務シフト決定と業務内容割当の 2 つに分けることができる．それぞれの問題例としては，

- 勤務シフト決定: ナーススケジューリング問題
- 業務内容割当: 訪問介護士スケジューリング・鉄道乗務員スケジューリング

などが挙げられる．そこでスケジューリング問題を高次結合ネットワークで取り扱うため，ここでは具体的な問題として学位審査会スケジューリング問題 (Defense of thesis Scheduling Problem: DSP) を取り上げる．この問題は大学院などで行われている学位論文の審査会スケジュールを，審査員の負担を軽減する観点から最適化するものである．例えば東北大学電気系の場合では，3 月卒業の為の修士論文審査は毎年論文本数が 100 本以上あり，それぞれの審査会を通常 3 人から 4 人の審査員によって審査している．審査員は各研究室の教授・准教授が行っており，その人数は研究室数より 70 人以上いると推定される．審査は予備日を含めて 3～4 日間程度かけて行われ，審査可能な時間枠が予め与えられている．また複数の審査会場が設定されており，同じ時間で複数の審査を行うことが可能になっている．さらに各審査員は審査会と並行して授業や出張，学会などの業務があるため，全ての時間枠において審査可能とは限らない．このように DSP におけるスケジューリングの条件は非常に複雑であり，また問題規模も比較的巨大である．しかしながら，東北大学電気系の例では，スケジューリングは事務担当者の経験と勘により作成されている．そのため担当者が変わってしまうと，物理的・時間的に矛盾のないスケジュールを作成することでさえ非常に困難であり，また出来上がったスケジュールが審査員の負担を軽減するという意味で最適化されているかどうかも分からない．またこの問題は大学における審査会のスケジューリングのみに留まらず，一般的な勤務シフト作成や面接のスケジューリングなどにも応用できると考えられる．これらのことから，スケジューリングの自動化は非常に意義が大きいと考えられる．本節ではエネルギー関数の汎化と拡張を行い，この DSP に 4 次形式のエネルギー関数を適用することで，自動スケジュール作成システムの実現を目指す．

第 1 日目

会場 時間	451 会議室			450 会議室			
	氏名	論文題目	審査委員	氏名	論文題目	審査委員	
9:00 ~ 10:25				△△ △	………について	○ 教授 H 教授 I 教授 J	
10:30 ~ 11:55	○○ ○○	………に関する 研究	○ 教授 A 教授 B 教授 C 准教授 D	● ● ●	………の合成法	○ 教授 K 教授 L 教授 M	■
13:00 ~ 14:25	□□ □□	………に関する 研究	○ 教授 E 教授 F 教授 B 准教授 G				
14:30			○ 教授 A				

図 4.7 学位論文審査会のスケジュール表の例 .

### 4.2.1 問題の定式化

DSP は学位論文審査会のスケジュールを審査員の立場から最適化する問題である．ここでは DSP についてより明確に定義する．まず，審査会は複数日・複数の時間枠で実施され，また同時間枠に複数の会場が用意される．審査員は 1 つの論文発表に対して複数人割り当てられ，また審査員によっては複数の論文を審査する必要がある．審査員各々には授業などの理由により審査を入れることができない時間枠が存在し，さらに審査員各々の予定や嗜好により，審査をスケジューリングして欲しくない時間枠も存在する．これらの要件を定式化すると，以下に挙げる集合・行列によって問題が記述できる．

- $\mathcal{D}$  … スケジュール可能な日程の集合
- $\mathcal{T}$  … スケジュール可能な時間枠の集合
- $\mathcal{R}$  … スケジュール可能な部屋の集合
- $\mathcal{H}$  … 審査すべき学位論文の集合
- $\mathcal{J}$  … 審査員の集合
- $\mathcal{J}_h$  … 学位論文  $h$  を審査すべき審査員の集合
- $c_{j,d,t}^s$  … 審査員  $j$  が  $d$  日目  $t$  枠で審査する場合のコスト
- $c_{r,s}^d$  … 審査員 1 人が部屋  $r, s$  間を移動するのにかかるコスト

なお，審査員  $j$  が  $d$  日目  $t$  枠での審査を行えない場合， $c_{j,d,t}^s = \infty$  とする．また日程，時間枠，部屋の組み合わせを審査枠と名付け， $(d, h, r)$  で表すこととする．

このとき，DSP ではまず以下の拘束条件を満足することが求められる．

- 拘束条件①: 全ての修論は 1 回ずつ審査される．



- 拘束条件②: 同日同時刻の同じ部屋で複数の修論を審査することはできない。
- 拘束条件③: 同じ審査員が審査する予定の修論については, 同日同時刻に審査することはできない。
- 拘束条件④: 審査員によっては審査できない時間枠があり, そこには審査をスケジュールすることができない。

以上の条件を満足した上で, 以下の要件をできるだけ満たすのが最適なスケジュールである。

- 最適化要件①: 各審査員について, 審査会が予定される日数は少ない方がよい。
- 最適化要件②: 各審査員について, 1 日のうちで審査会がスケジュールされる時間枠は連続しているほうがよい。
- 最適化要件③: 各審査員の部屋間の移動距離は少ない方がよい。
- 最適化要件④: 各審査員ができればスケジュールして欲しくないと考えている時間枠は, できるだけ避けた方がよい。

これらの要件は, 各審査員の審査にかかる負担をできるだけ軽減することを目的とした最適化要件である。またこれらの要件をできるだけ満足することで, より効率的に審査会を遂行することができる。

#### 4.2.2 ネットワーク構成

ここで DSP をニューラルネットワークにより記述するために,  $|\mathcal{D}| \times |\mathcal{T}| \times |\mathcal{H}| \times |\mathcal{R}|$  のニューロン行列  $x$  を用意する。このとき, ニューロン行列の各ニューロンの出力について, 以下のように定める。

$$x_{d,t,h,r} = \begin{cases} 1 & \text{論文 } h \text{ を審査枠 } (d, t, r) \text{ で審査する。} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.17)$$

但しある審査員  $\hat{j} \in \mathcal{J}_{\hat{h}}$  について  $c_{\hat{j}, \hat{d}, \hat{t}}^s = \infty$  の場合, すなわち審査員  $\hat{j}$  が審査枠  $(\hat{j}, \hat{d}, \hat{t})$  で審査できない場合は  $x_{\hat{d}, \hat{t}, \hat{h}, \hat{r}} = 0$  に固定することとする。これにより, 拘束条件④を実装することができる。

このネットワーク状態  $x$  に対して, DSP の解のコスト  $c_{\text{sol-DSP}}(x)$  は以下のように定義できる。

$$c_{\text{sol-SCH}}(x) = \frac{1}{2} \sum_d \sum_t \sum_h \sum_r \left( 2x_{d,t,h,r}^2 b_{dthr}^F + \sum_e \sum_u \sum_i \sum_s x_{d,t,h,r} x_{e,u,i,s} b_{dthr,euis}^S \right) \quad (4.18)$$

ここで  $b_{dthr}^F$  は 1 次のコスト項を, また  $b_{dthr,euis}^S$  は 2 次のコスト項をそれぞれ表しており,

$$b_{dthr}^F = P_4 \sum_j^{\mathcal{J}_h} c_{j,d,t}^s \quad \dots \textcircled{1} \quad (4.19)$$

$$b_{dthr,euis}^S = \sum_j^{\mathcal{J}_h \cap \mathcal{J}_i} \{ P_1 (1 - \delta_{d,e}) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$+ P_2 \delta_{d,e} (1 - \delta_{t-1,u}) (1 - \delta_{t+1,u}) (1 - \delta_{t,u}) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$+ P_3 c_{r,s}^d \delta_{d,e} (\delta_{t-1,u} + \delta_{t+1,u}) \} \quad \dots \textcircled{4} \quad (4.20)$$

で定義される．ここで  $P_1 \sim P_4$  は正の定数であり, 最適化要件それぞれの重み付けをコントロールする．式 (4.19) および式 (4.20) のそれぞれの項は, それぞれ以下の最適化要件に対応している．

- ①項 … 最適化要件④
- ②項 … 最適化要件①
- ③項 … 最適化要件②
- ④項 … 最適化要件③

またすべての要件を完全に満たす場合,  $c_{sol-DSP} = 0$  となる．ただし DSP では,  $c_{sol-DSP} = 0$  となるような解が存在することは保証されていない．

#### 4.2.3 4 次形式のエネルギー関数の拡張

ここまでの議論より, DSP は 1 次および 2 次のコスト項を含む式によりその解コストが表現される．そこで, ここでは 4 次形式のエネルギー関数を 1 次・2 次のコスト項を持つようなエネルギー関数に拡張し, 学位論文審査会スケジューリング問題を埋め込むためのエネルギー関数を作成する．1 次・2 次のコスト項を持つ 4 次形式のエネルギー関数  $E(x)_{SCH}$  は以下のように表される．

$$E(x)_{SCH} = (\text{Constraint Conditions})$$

$$+ \frac{B}{2} \sum_i \sum_j \dots \left\{ 2x_{i,j,\dots}^2 (1 - x_{i,j,\dots})^2 b_{ij,\dots}^F \right.$$

$$+ \left. \sum_u \sum_v \dots x_{i,j,\dots} x_{u,v,\dots} (1 - x_{i,j,\dots} x_{u,v,\dots}) b_{ij,\dots,uv,\dots}^S \right\}$$

$$+ \frac{C}{2} \left\{ \sum_i \sum_j \dots \left( 2x_{i,j,\dots}^2 b_{ij,\dots}^F + \sum_u \sum_v \dots x_{i,j,\dots} x_{u,v,\dots} b_{ij,\dots,uv,\dots}^S \right) \right\}^2 \quad (4.21)$$

ここで  $i, j, \dots$  および  $u, v, \dots$  はニューロンのインデックスを表す．式 (4.21) 中の「Constraint Conditions」は拘束条件を表す関数である．この項は問題の拘束条件に合わせて設計する必要があり, また全ての拘束条件を満足した時に値が 0 にする必要がある．

次にこのエネルギー関数を HC-ID ネットワークなどの高次結合ネットワークに適用した場合の, ネットワークの安定性について考える．拘束条件を満たすと仮定すると, あるニューロンの出力

$x_{\hat{i},\hat{j},\dots}$  に関する  $E(\mathbf{x})_{\text{SCH}}$  の偏微分値は以下のように求まる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(\mathbf{x})_{\text{SCH}}}{\partial x_{\hat{i},\hat{j},\dots}} &\simeq \left( x_{\hat{i},\hat{j},\dots} + \sum_u \sum_v \cdots b_{\hat{i}\hat{j}\dots,uv\dots} x_{u,v,\dots} \right) \times \left\{ 2B \left( \frac{1}{2} - x_{\hat{i},\hat{j},\dots} \right) + 4C c_{\text{sol-SCH}}(\mathbf{x}) \right\} \\
&= \left( x_{\hat{i},\hat{j},\dots} + \sum_u \sum_v \cdots b_{\hat{i}\hat{j}\dots,uv\dots} x_{u,v,\dots} \right) \times \left\{ \frac{B}{2C} \left( \frac{1}{2} - x_{\hat{i},\hat{j},\dots} \right) + c_{\text{sol-SCH}}(\mathbf{x}) \right\} \\
&= \begin{cases} \left( x_{\hat{i},\hat{j},\dots} + \sum_u \sum_v \cdots b_{\hat{i}\hat{j}\dots,uv\dots} x_{u,v,\dots} \right) \cdot 4C \left\{ \frac{B}{4C} + c_{\text{sol-SCH}}(\mathbf{x}) \right\} & \text{if } x_{\hat{u},\hat{i}} \simeq 0 \\ \left( x_{\hat{i},\hat{j},\dots} + \sum_u \sum_v \cdots b_{\hat{i}\hat{j}\dots,uv\dots} x_{u,v,\dots} \right) \cdot 4C \left\{ -\frac{B}{4C} + c_{\text{sol-SCH}}(\mathbf{x}) \right\} & \text{if } x_{\hat{u},\hat{i}} \simeq 1 \end{cases} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

ここで  $c_{\text{sol-SCH}}(\mathbf{x})$  は解状態  $\mathbf{x}$  のコスト値を表し，

$$c_{\text{sol-SCH}}(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j \cdots \left( 2x_{i,j,\dots} {}^2b_{ij\dots}^F + \sum_u \sum_v \cdots x_{i,j,\dots} x_{u,v,\dots} b_{ij\dots,uv\dots}^S \right) \quad (4.23)$$

で定義される．したがって  $E(\mathbf{x})_{\text{SCH}}$  においても，従来の 4 次形式のエネルギー関数と同様にネットワークの安定性が議論でき，

$$c_{\text{sol-SCH}}(\mathbf{x}) \begin{cases} < B/4C & \text{ならば，解状態 } \mathbf{x} \text{ は安定．} \\ > B/4C & \text{ならば，解状態 } \mathbf{x} \text{ は不安定．} \end{cases} \quad (4.24)$$

が成り立つ．

以上の議論を基に，DSP を記述する 4 次形式のエネルギー関数は以下のように設計される．

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{x})_{\text{DSP}} &= \frac{A_1}{2} \sum_h \left( \sum_d \sum_t \sum_r x_{d,t,h,r} - 1 \right)^2 \\
&+ \frac{A_2}{2} \sum_d \sum_t \sum_r \left( \sum_h \sum_{i \neq h} x_{d,t,h,r} x_{d,t,i,r} \right) \\
&+ \frac{A_3}{2} \sum_d \sum_t \sum_h \sum_{i \neq h} \sum_j \left( \sum_r x_{d,t,h,r} \right) \left( \sum_r x_{d,t,i,r} \right) \\
&+ \frac{B}{2} \sum_d \sum_t \sum_h \sum_r \left[ 2x_{d,t,h,r}^2 (1 - x_{d,t,h,r}^2) b_{dthr}^F \right. \\
&\quad \left. + \sum_e \sum_u \sum_i \sum_s x_{d,t,h,r} x_{e,u,i,s} (1 - x_{d,t,h,r} x_{e,u,i,s}) b_{dthr,euis}^S \right] \\
&+ \frac{C}{2} \left[ \sum_d \sum_t \sum_h \sum_r \left( 2x_{d,t,h,r} {}^2b_{dthr}^F + \sum_e \sum_u \sum_i \sum_s x_{d,t,h,r} x_{e,u,i,s} b_{dthr,euis}^S \right) \right]^2 \quad (4.25)
\end{aligned}$$

ここで  $A_1 \sim A_3$  は正の定数である．式 (4.25) の第 1 ～ 3 項はそれぞれ拘束条件①～③に対応しており，これらの条件を満足した際に 0 となる．また  $E_{\text{DSP}}$  についても，解の安定性条件について以下が

表 4.1 シミュレーションで取り扱う DSP の審査員条件と各審査員の審査論文．表中央部は審査員の都合を表しており， $\circ$ は審査可， $\times$ は審査不可， $\Delta$ はできれば避けて欲しい時間枠をそれぞれ表している．また右端の列は各審査員が審査すべき論文を表す．

	Day 1			Day 2			審査論文
	13:00 ~	15:00 ~	17:00 ~	13:00 ~	15:00 ~	17:00 ~	
Prof. A							1, 2, 3
Prof. B							1, 2
Prof. C							1, 3
Prof. D							2, 4
Prof. E	$\times$			$\times$			3
Prof. F							4, 6, 7
Prof. G	$\times$	$\times$	$\times$				4, 6
Prof. H		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		5
Prof. I							5, 6, 7
Prof. J							5, 7

成り立つ．

$$c_{\text{sol-DSP}}(x) \begin{cases} < B/4C & \text{ならば, 解状態 } x \text{ は安定.} \\ > B/4C & \text{ならば, 解状態 } x \text{ は不安定.} \end{cases} \quad (4.26)$$

これより，DSP についても TSP や QAP などと同様に解探索を行うことができる．

#### 4.2.4 数値シミュレーションによる解探索結果

最後に数値シミュレーションによる実際の DSP 解探索の結果を示す．ここでは表 4.1 に示すような条件下で，7 本の審査を行う場合についてシミュレーションにより解探索を行う．なお審査日数は 2 日，審査日は 2 日間である．さらに最適化項の重み付けパラメータは  $P_1 = P_3 = 1.0, P_2 = P_4 = 0.5$  とした．このとき，解のコストは 0.5 ずつの離散的な値を取る．また解探索に用いる高次結合ネットワークとしては，ネットワークパラメータのチューニングが不要である点から非同期更新の離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを用いた．

これらの条件下での，シミュレーション結果を図 4.8 に示す．図 4.8 は出現する解状態のパラメータ  $B/4C$  依存性を示している．このより，DSP においても，TSP や QAP などの場合と同様に  $B/4C$  の値によりコストが小さい解状態のみが得られていることが分かる．また， $B/4C = 4.75$  のときネットワーク状態が収束しないことから，最適解のコストは 5.0 であると推定できる．このことから， $B/4C$  の値を徐々に小さくしていくことで，よりコストの小さな解が得られ，最終的に収束しなくなる直前の解状態が最適解として得られることが分かった．

得られた最適解の例を表 4.2 に示す．得られたスケジュールは全て拘束条件を満足しており，物理的・時間的に遂行可能なスケジュールを得ることができた．また表 4.2 に示すような最適なスケ

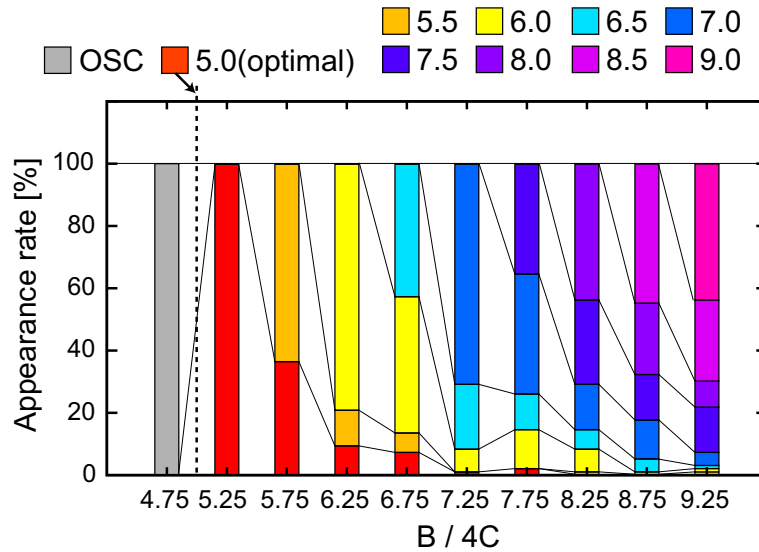


図 4.8 DSP を離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを用いて解いた場合の出現解の  $B/4C$  依存性 . パラメータは  $A_1 = 100, A_2 = A_3 = 40, C = 0.10, \alpha = 0.0, \tau_u = 1.0$  .

表 4.2 得られた最適解の例

		Room A	Room B
Day 1	13 : 00 ~	Thesis 2 (Prof. A, B, D)	
	15 : 00 ~	Thesis 1 (Prof. A, B, C)	
	17 : 00 ~	Thesis 3 (Prof. A, C, E)	
Day 2	13 : 00 ~	Thesis 7 (Prof. F, I, H)	
	15 : 00 ~	Thesis 6 (Prof. F, G, I)	
	17 : 00 ~	Thesis 4 (Prof. D, F, G)	Thesis 5 (Prof. H, I, J)

ジュールでは、同一審査員の参加する審査会が比較的連続してスケジュールされており、また各審査員の審査参加日ができるだけ 1 日で済むようにスケジュールされていることが分かる。これらのことから、より審査員の負担が小さくなるような学位論文審査のスケジュールを作成することができた。

### 4.3 まとめ

本章では、HC-ID ネットワークによる組合せ最適化問題解探索システムについて、より汎用性のあるシステムへと拡張した。具体的には、HC-ID ネットワークを基に離散時間 HC-ID ネットワークや離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを導出した。これらは HC-ID ネットワークに離散時間ダイナミクスを導入したり、出力を 2 値に制限したりすることで得られた高次結合ネットワークである。離散時間化や出力 2 値化を行うことで、数値シミュレーションによる計算時間を短縮すると共に、デジタル回路によるネットワークの実装を容易にするねらいがある。本章では離散時間

HC-ID ネットワークや離散時間 HC-ヒステリシスネットワークによる解探索性能を調べ、従来の HC-ID ネットワークと同様に  $B/4C$  の値により得られる解状態を選択できることを示した。また数値実験により、導出したネットワークが従来の HC-ID ネットワークに比べ収束時間が短縮されることを確かめた。さらに離散時間 HC-ヒステリシスネットワークにおいては、非同期更新を用いることでネットワークパラメータの調節が不要になることを示した。

次に、より実用的な問題の一つとして学位論文審査会スケジューリング問題 (DSP) を取り上げた。DSP はスケジューリング問題の一種であり、DSP 解探索は様々なスケジューリング問題の解探索への応用が考えられる。本章ではまず 4 次形式のエネルギー関数を拡張し、より多くの組合せ最適化問題を高次結合ネットワークに適用できることを示した。また得られたエネルギー関数を用いた場合に、ネットワーク状態の静止時した時に 100% 最適解を得るためのパラメータ条件を明らかにした。さらにこれらの知見を基に、高次結合ネットワークを DSP 解探索に適用するための 4 次形式のエネルギー関数を作成した。また離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを用いて実際に解探索を行い、最適化されたスケジュールが得られることを示した。これらの成果により、高次結合ネットワークを用いた組合せ最適化問題解探索システムの汎用性を向上させることができた。



## 5 ハードウェア設計

前章では HC-ID ネットワークに離散時間ダイナミクスを導入し、また出力を 2 値化した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを導出し、シミュレーションでの演算時間の短縮を図った。これにより、ある程度大きな問題についてもシミュレーションによりネットワーク動作を実現することが可能になった。しかし、さらに大きな問題を実時間で解くためには、ニューラルネットワークの並列性を活かす必要があり、そのためにはシステムをハードウェア実装しなければならない。そこで本章では、高次結合ネットワークのハードウェア実装について考察する。

まず、FPGA を用いた離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの実装を目指し、高次結合を有するニューロン素子の設計を行う。また設計した素子について実装時に必要な FPGA リソース量を見積もる。次に、HC-ヒステリシスネットワークにストカスティック論理を導入する。ストカスティック論理を導入することで生じるノイズ効果を用いて、解探索性能の向上を目指す。

### 5.1 FPGA による実装に向けて

4 章で導出した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークは 2 値出力・離散時間ダイナミクスを持つため、デジタル回路での実装に向いていると考えられる。そこでここでは、FPGA を用いた離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを目指す。FPGA(Field-Programmable Gate Array) は回路動作がプログラマブルな LSI である [37]。FPGA 上にはメモリ、マルチプレクサ、フリップフロップなどからなる論理ブロックが縦横に配置されている。論理ブロック内のメモリを書き換えることで必要な論理機能が自由に設計でき、また論理ブロック間の結線もスイッチにより変更できるようになっている。また FPGA の動作は、HDL(Hardware Description Language) によりプログラムとして記述することができ、記述されたプログラムをコンパイルすることで、FPGA の動作書き換えを行うことができる。このため、LSI を作成するのに比べ FPGA による実装の方がフレキシブルで、実装にかかる手間が少ないのが特徴である。本研究ではまずデジタル回路による実装に向けて離散時間 HC-ヒステリシスネットワークのニューロン素子を設計する。その後、設計したニューロン素子を HDL により記述し、解析ソフトを用いて FPGA に実装するのに必要なリソースの見積もりを行う。



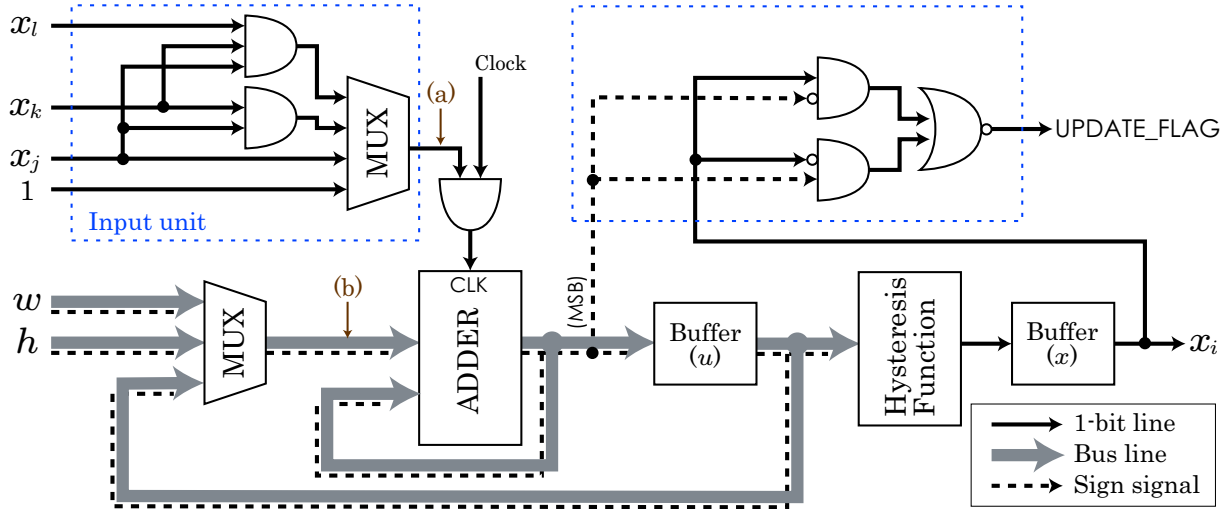


図 5.1 離散時間 HC-ヒステリシスネットワークニューロン素子のブロックダイアグラム．太線はマルチ bit ラインを，点線は符号ラインを，また単線は 1bit ラインをそれぞれ表す．

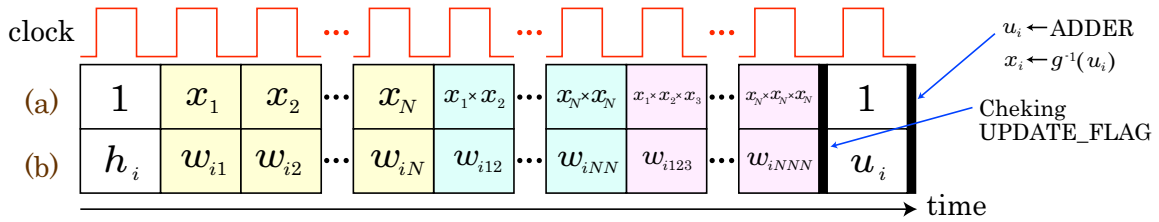


図 5.2 1 イテレーション当たりのニューロン素子の更新処理のタイムライン．(a) と (b) のタイムラインはそれぞれ図 5.1 の (a) 点・(b) 点における信号を表している．

### 5.1.1 ニューロンユニットのブロックダイアグラム

離散時間 HC-ヒステリシスネットワークのニューロン素子は図 5.1 に示すブロックダイアグラムにより実装される．またこのユニットは図 5.2 に示すタイムラインに沿って状態の更新処理を行う．設計したユニットにおいて，高次結合からの積和入力 (式 (4.15) 中の  $\theta$ ) は ‘input unit’ と adder により計算される．‘input unit’ は他ニューロンからの入力の積を計算し，その結果を (a) を通して AND ゲートへと送る．一方，荷重値またはバイアス値はメモリからロードされ，(b) を通して adder への送られる．他ニューロンからの入力の積が 1 の場合，adder は (b) を通ってきた荷重値を積算する．この処理を繰り返すことで，設計ユニットは積和入力の演算を行うことができる．またこの方法を採用することで，直接高次結合を実装した場合に比べ大幅に回路面積を節約することができる．

積和入力が計算し終わったら，ユニットは UPDATE\_FLAG をチェックする．UPDATE\_FLAG は式 (4.15) の内部状態の発散を防止するための更新制限に対応しており，このフラグ値が 0 の場合は更新処理を行わない．フラグ値が 1 の場合は adder を用いて  $\theta + u(t)$  の値を計算し，内部状態と出力を新しい値で更新する．

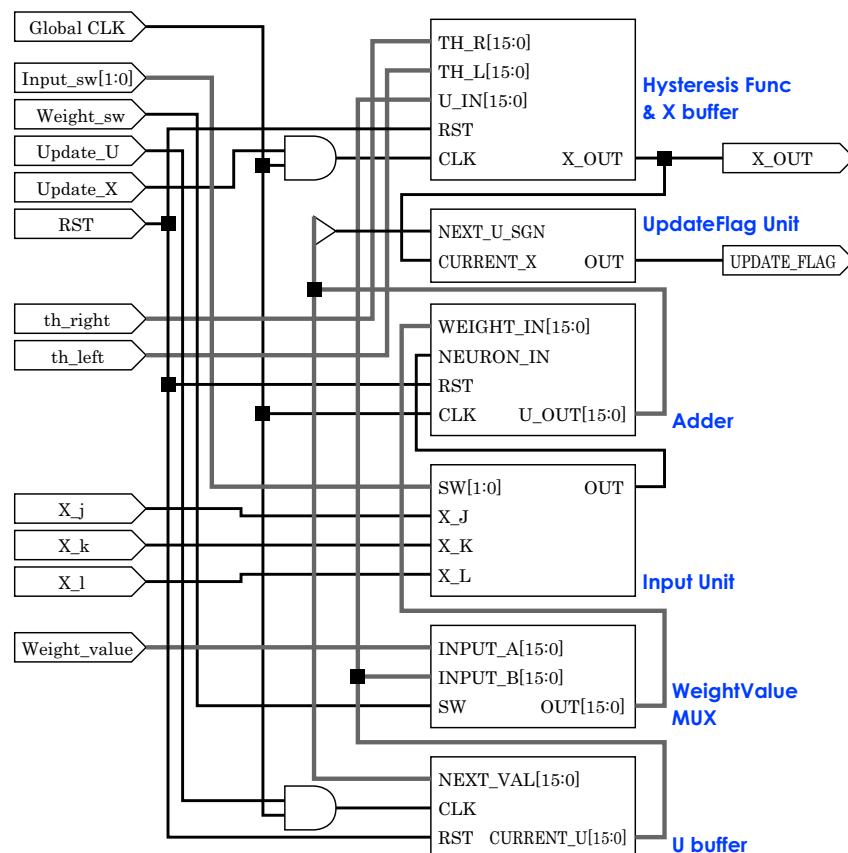


図 5.3 Xilinx ISE 8.1i により合成された回路のブロックダイアグラム．太線はマルチビット線を，細線は単ビット線を表す．また各ユニットの左側の端子は入力端子を，右側の端子は出力端子をそれぞれ表す．

### 5.1.2 実装に必要な FPGA リソースの見積もり

次に，設計したニューロンユニットを FPGA ボードに実装する場合に必要なリソースの量を見積もる．ここでは，荷重値，バイアス値や内部状態のビット幅をすべて 16 bit として見積もりを行った．(データ 15 bit + 符号 1 bit) また見積もりは設計したユニットを Verilog-HDL によりコーディングし，それを Xilinx ISE 8.1i を用いて解析することで行った．ターゲットデバイスは Xilinx Spartan 3 device (xc3s200-4ft256) とした．個のデバイスは 3,800 個のフリップフロップセルと 4 入力 Look-Up Table を持つ，比較的小規模なデバイスである．ISE によって合成されたブロックダイアグラムを図 5.3 に，また解析結果を表 5.1 に示す．これらの結果より，設計したシステムを用いることで，高次結合を有するニューロンユニットを比較的少ない FPGA リソースにより実装できることが分かった．

表 5.1 FPGA 上に実装した際の必要リソース .

Number of LUTs	76
Number of Flip Flops	53
Number of occupied slices	60 (3%)

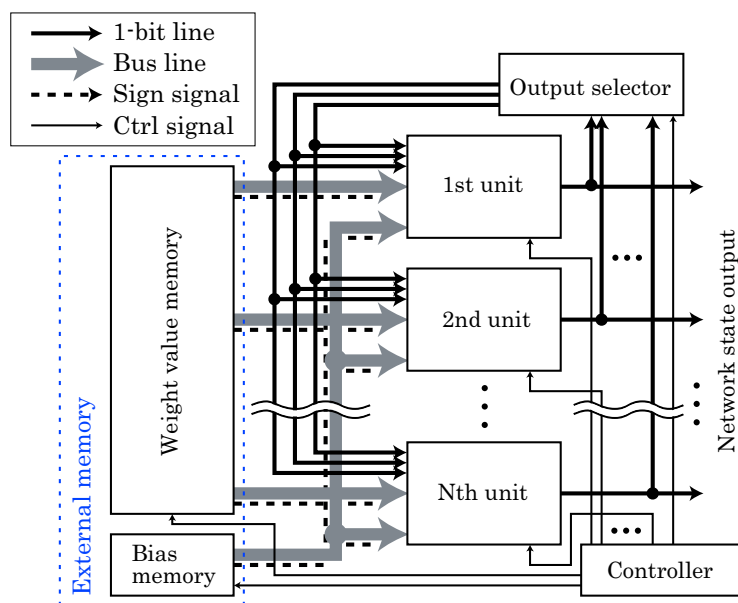


図 5.4 離散時間 HC-ヒステリシスネットワークのブロックダイアグラム .

### 5.1.3 離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの構築

前節で設計したニューロンユニットを用いた離散時間 HC-ヒステリシスネットワークのブロックダイアグラムを図 5.4 に示す．荷重値やバイアス値は外部メモリに予めストアし，ニューロンユニットはその値を計算過程に沿って読み出す．また設計したニューロンユニットを用いることで，ニューロン間の結合ラインを 3 本に抑えることができる．このシステムを使った場合，同期更新では各ニューロンの更新処理を完全に並列に行うことができる．さらに，非同期更新の場合でもパイプライン処理を用いることで，ある程度並列して各ニューロンを更新することができる．

## 5.2 ストカスティック論理を導入した高次結合ネットワーク

2.5 節で述べたように，ストカスティック論理は元々アナログ値をデジタルパルスに変換して演算を行うことで，演算にかかる回路リソースを削減するための技術である．しかし，ストカスティック論理はパルスへのエンコード時に乱数を用いるため，そのダイナミクス中には少なからずノイズのダイナミクスが生じる．ここではこのノイズのダイナミクスに着目し，離散時間 HC-ヒステリシスネットワークにストカスティック論理を導入することで解探索性能の向上を目指す．

### 5.2.1 離散時間 HC-ヒステリシスネットワークへのストカスティック論理の導入

離散時間 HC-ヒステリシスネットワークでは内部状態の無限方向への発散を防ぐために、内部状態の更新に式 (4.15) に示されるような制限を加えている。しかしストカスティック論理を導入することで、計算される内部状態にはストカスティックノイズに起因する揺らぎが生じる。これは他ニューロンからの入力  $\theta$  を計算する際にストカスティックノイズの影響を受けるためである。そこでここでは、まず  $\theta$  をストカスティック論理により計算した場合の揺らぎを見積もる。

ストカスティック論理により計算された入力  $\tilde{\theta}$  の分散は、式 (2.28) より以下のように見積もられる。

$$V[\tilde{\theta}] = \left( \frac{W_{\max} \cdot \tilde{N}}{N_a \cdot \tilde{N}} \right)^2 N_a \cdot \tilde{N} \cdot P_f (1 - P_f) = \frac{1}{N_a \cdot \tilde{N}} \theta (W_{\max} \cdot \tilde{N} - \theta) \quad (5.1)$$

ここで  $\tilde{N}$  は  $\tilde{\theta}$  を計算する際の積和演算回数を、また  $P_f$  はパルスの生成確率、 $N_a$  は積和演算 1 回当たりのパルスの積算回数を表す。さらに  $W_{\max}$  は荷重値の絶対値の最大値である。ただし式 (5.1) の見積もりにおいては各荷重値やニューロン出力には相関がないことを仮定しているため、実際はこの見積もりよりも大きくなる可能性がある。式 (5.1) から分かるように、ストカスティック論理により計算された入力  $\tilde{\theta}$  の分散  $V[\tilde{\theta}]$  は  $1/(\tilde{N} \cdot N_a)$  に比例することが分かっている [29]。このことから一般的には、ネットワーク中のシナプス結合数が増加するほど  $V[\tilde{\theta}]$  は小さくなる。ただし、 $\theta$  を計算する際の積算回数はニューロンの出力により変動するため、 $\tilde{\theta}$  の最大値は  $\tilde{N} = 1$  とした時の値であると考えられ、

$$\max(V[\tilde{\theta}]) = \max \left[ \frac{1}{N_a} \theta (W_{\max} - \theta) \right] = \frac{W_{\max}^2}{2N_a} \quad (5.2)$$

となる。

次に離散時間 HC-ヒステリシスネットワークへストカスティック論理を導入した際の内部状態の更新抑制条件について考える。ストカスティックノイズによる  $\theta$  の揺らぎを考慮し、式 (4.15) を以下のように変更する。

$$\tilde{u}_i(t+1) = \begin{cases} \tilde{u}_i(t) & \text{if } (x_i(t) = 0 \text{ and } \tilde{\theta}_i < -f) \text{ or } (x_i(t) = 1 \text{ and } \tilde{\theta}_i > f) \\ \tilde{u}_i(t) + \tilde{\theta}_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.3)$$

ここで  $f$  は内部状態のゆらぎの許容範囲を表す。ストカスティック論理で用いる乱数列は一様乱数であるため、 $\tilde{\theta}$  の分散はガウス分布に従う。よって平均から  $\pm\sqrt{V}$  だけずれた範囲を内部状態更新の許容範囲とする。これより、

$$f = \sqrt{\max(V[\tilde{\theta}])} = \frac{W_{\max}}{2\sqrt{N_a}} \quad (5.4)$$

と設定する。

表 5.2 QAP 問題におけるエネルギー関数のパラメータ設定例パラメータ  $B$  と  $C$  は式 (3.21) を満たす中で任意に設定し，設定された  $B \cdot C$  からパラメータ  $A$  を設定した．‘ $A(\text{Conventional})$ ’ は式 (3.18) にしたがって，また ‘ $A(\text{Proposed})$ ’ は式 (5.5) にしたがって設定した結果である．

$n$	$m$	$b_{\max}$	$C$	$B$	$A(\text{Conventional})$	$A(\text{Proposed})$
4	3	8.94	0.10	4.68	376.73	125.57
6	5	1.51	0.10	1.27	48.25	9.65
8	7	0.90	0.10	2.04	90.93	12.99

### 5.2.2 エネルギー関数のパラメータ $A$ の再考

式 (5.1) より，ストカスティックノイズの大きさは  $N_a$  と  $W_{\max}$  により決まり， $W_{\max}$  は値が小さいほどストカスティックノイズの影響が小さくなる． $W_{\max}$  は荷重値の絶対値の最大値で決まるため， $W_{\max}$  を小さくするためにはエネルギー関数のパラメータ  $A, B, C$  のレンジを小さくしなければならない．そこでここでは，エネルギー関数のパラメータのレンジについて調べ，レンジを小さくするような新しいパラメータの設定条件を導出する．

表 5.2 に，QAP において静止状態で最適解が得られるように設定した場合のエネルギー関数のパラメータ値を示す．この表において，‘ $A(\text{Conventional})$ ’ は式 (3.18) にしたがって設定された  $A$  を表す．これよりパラメータ  $A$  が  $B$  に比べ 10 ～ 100 倍程度大きな値になっていることが分かる．しかし実際には，式 (3.18) で得られた値よりも小さな値を  $A$  に設定しても，静止状態で最適解のみが得られていた．そこで， $A$  をより小さくするため，式 (3.18) よりも厳密な条件式を以下のように導出した．

$$A > \max \left[ \frac{B^2}{4C}, B \cdot M \cdot b_{\max} \right] \quad (5.5)$$

従来の条件 (式 (3.18)) では，ネットワーク中の発火ニューロンの個数制限を満足しないすべての状態を不安定化するための条件よりパラメータ  $A$  を導出していた．これに対して，新しい条件 (式 (5.5)) ではまずパラメータ  $B/4C$  の条件により不安定化されなかった状態の中で，発火ニューロンの個数制限を満足しない状態を不安定化するための条件より  $A$  を導出する (条件式の詳しい導出法は付録 A を参照のこと)．この新しい条件にしたがって計算される  $A$  の値を表 5.2 の ‘ $A(\text{Proposed})$ ’ に示す．これより，従来の条件式にしたがった場合と比べ， $1/3$  以下の値で最適解が得られることが分かる．以下のストカスティック論理を導入したネットワークによる解探索では，この新しい条件式を用いて  $A$  を決定している．

### 5.2.3 解探索性能の比較

ここではストカスティック論理を導入した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークによる解探索性能を数値シミュレーションにより考察する．なお，全てのシミュレーション結果は図 3.5 に示す 4-QAP の解探索に適用した結果であり，またネットワーク更新法は非同期更新 (固定順) とした．

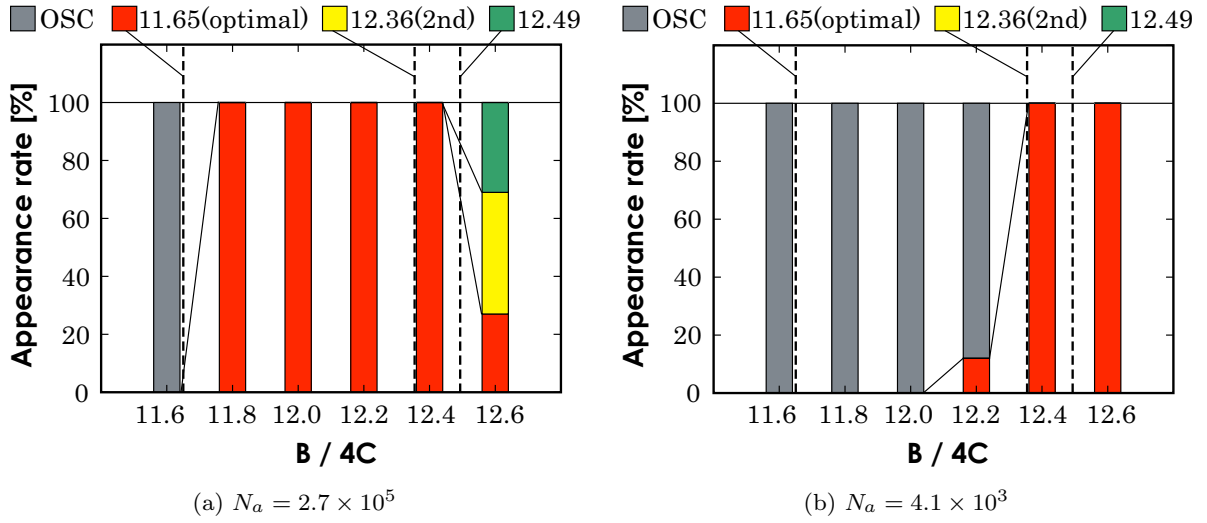


図 5.5 ストカスティック論理を導入した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークによる 4-QAP 解探索における、出現状態の  $B/4C$  依存性の  $N_a$  による変化．ネットワークパラメータは  $\alpha = 0$  ,  $\tau_u = 1$  .

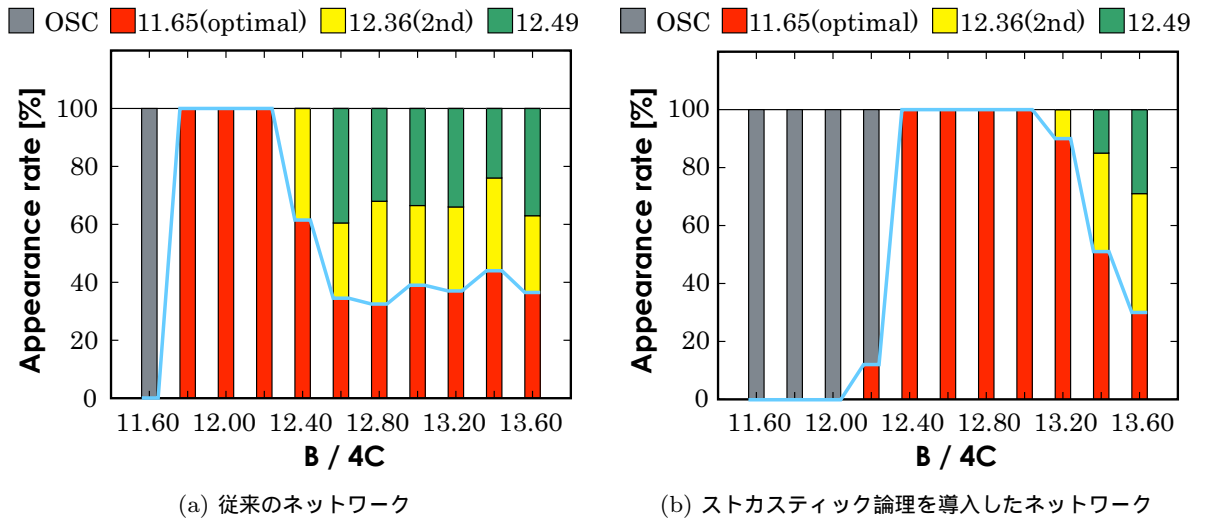


図 5.6 ストカスティック論理の有無による  $B/4C$  の最適レンジの変化．青の太線は最適解の出現率を表している．(b) では  $N_a = 4.1 \times 10^3$  . またネットワークパラメータはいずれも

まず、図 5.5 はストカスティック論理を導入した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークにおいて  $N_a$  の値を変えた時に得られる解状態の変化を示している．図 5.5 と図 4.3(b) の比較により、 $N_a$  が十分に大きくストカスティックノイズの影響が小さい場合は、従来の離散時間 HC-ヒステリシスネットワークと同様に解探索が行えることが分かる．一方  $N_a$  が小さく、ストカスティックノイズの影響が大きくなると、解探索性能に変化が生じることが分かる．そこでより広い  $B/4C$  の範囲で解探索を行い、従来の離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの場合と比較した．図 5.6 はストカスティッ

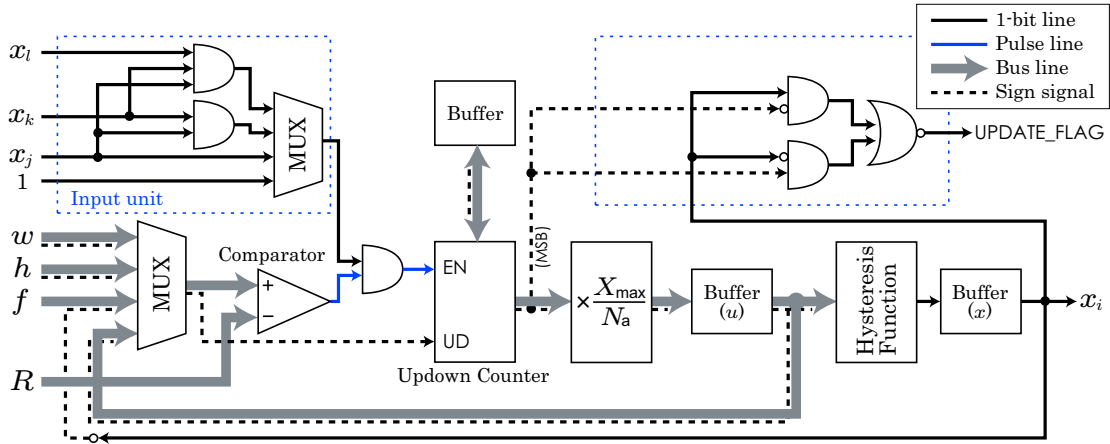


図 5.7 ストカスティック論理を導入した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークニューロン素子のブロックダイアグラム．太線はマルチ bit ラインを，点線は符号ラインを，また単線は 1bit ラインをそれぞれ表す．また青で示した 1bit ラインはストカスティックパルスが通過する信号線である．

クノイズの影響が影響がない場合とある場合の出現する解状態の  $B/4C$  依存性を示している．またこの図の青い太線は最適化の出現率を表しており，青の太線が 100% を示す部分が  $B/4C$  の最適レンジとなる．この結果より，ストカスティックノイズを入れることで最適解が得られる  $B/4C$  のレンジが広がっていることが分かる．このことからストカスティック論理を導入することで，離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの解探索性能が向上する可能性があると考えられる．

#### 5.2.4 ストカスティック論理を導入した場合のニューロン素子

離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを実現するニューロン素子 (図 5.1) を基に，ストカスティック論理を導入した場合のニューロン素子を設計した．この場合のブロックダイアグラムを図 5.7 に示す．回路の基本的な動作はストカスティック論理導入前の回路と同じであるが，積和演算部はストカスティックパルスへのエンコーダーとデコーダによって置き換えられている．また UPDATE\_FLAG の計算に揺らぎ  $f$  の計算が必要になったため，一度積和演算の結果を Buffer に待避させてから  $\tilde{\theta} \pm f$  の値を計算する機構が追加されている．これらの回路の変更により，1 ニューロン素子を実装するために必要な回路リソースは増加すると考えられる．一方ストカスティックノイズの影響を導入することで，解探索性能は向上が期待できる．

### 5.3 まとめ

さらに大きな問題を実時間で解くためには，ニューラルネットワークの並列性を活かす必要がある．そのための方法の一つがシステムのハードウェア実装である．本章では高次結合ネットワークの FPGA による実装を目指して，ニューロン素子の設計とストカスティック論理の導入を行った．まず，離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを FPGA に実装するためのニューロン素子を設計し，

その動作について考察した．また設計した回路を HDL によって記述し，ソフトウェア解析により実装に必要な FPGA リソースを見積もった．回路の設計に当たり，回路リソースを節約するために積和演算を時間軸方向に展開し，回路間のライン数を少なく抑えた．これにより，離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの動作を少ないライン数で実現することができるニューロン素子を設計することができた．

次に，離散時間 HC-ヒステリシスネットワークにストカスティック論理を導入した．ストカスティック論理導入のために生じる内部状態の揺らぎを見積もり，それに合わせてニューロンの更新式に修正を加えた．また少ない積算回数でもストカスティックノイズの影響を抑え計算精度を確保するため，エネルギー関数のパラメータの導出条件を見直した．これにより，パラメータ  $A$  に関する最適解を得るためのより厳密な条件 (式 (5.5)) を得ることができた．導出したストカスティック離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを用いることで，解探索ダイナミクス中にストカスティックノイズを導入することができた．これにより，最適解が得られる  $B/4C$  のパラメータレンジが広がることを示した．またストカスティック離散時間 HC-ヒステリシスネットワークについても，FPGA 上に実装するためのニューロン素子を設計した．

本章の成果により，より大規模な問題を解くための高次結合ネットワークによる解探索システムの実現に向けた道筋を示すことができた．





## 6 結論

生体の脳は、判断、学習、認識といった高度な情報処理を日々こなしている。これらは現在存在する多くの計算機が苦手する処理であり、脳型の情報処理システムには既存の計算機にはない高いポテンシャルがあると期待される。そこで我々は、脳の神経回路網を基に、より柔軟で的確な処理を行える情報処理システム、すなわち脳型計算機の実現を目指し研究を進めている。

神経細胞網の情報処理機構を基に作られたモデルの一つとして、逆関数遅延ネットワーク (ID ネットワーク) が提案されている。ID ネットワークは動作に実際の神経細胞で見られるような自律的動作を取り入れたモデルである。これにより、既存の計算機が苦手とする情報処理である組み合わせ最適化問題の解探索や連想記憶、学習などを効率的に処理できることが分かっている。本研究では ID ネットワークが有用な脳型計算機システムであると考え、これを用いたアプリケーションについて、組合せ最適化問題の解探索システムを中心に扱った。

組合せ最適化問題は与えられた拘束条件を満たす組合せの中で、目的関数が最小になるような組合せをを求める問題である。その応用は科学・工学・オペレーションズリサーチ・経済など至る所に存在し、最適解を実時間に得ることができるとなると解探索システムの実現が望まれている。しかしこれらの問題の多くは従来の計算機により実時間に最適解を得ることが困難である。そこで実時間での解探索システム実現に向け、これまでさまざまな研究が行われてきた。ID ネットワークを用いた組合せ最適化問題の解探索では、これまでに幾つかの問題で最適解が得られることが分かっている。特に N-Queen 問題や 4 色問題と呼ばれる問題では、ネットワークの出力が静止すれば 100% 正解が得られることが示されており、最適解を得るための素子の自律性の設定法も明らかにされていた。一方、より難易度が高い巡回セールスマン問題 (TSP) や 2 次割当問題 (QAP) については、同様の方法を用いてネットワーク状態静止時に解を得ることができない、という問題点があった。

そこで本研究では、ID ネットワークによる組合せ最適化問題の解探索システムを基に、様々な問題に適用可能な汎用的システムを構築・提案した。まず、ID ネットワークに高次結合を導入した高次結合逆関数遅延ネットワークを提案し、TSP や QAP などの組合せ最適化問題に適用可能な 4 次形式のエネルギー関数を設計した。HC-ID ネットワークに提案したエネルギー関数を適用することで、式 (3.20) に示す条件により得られる解状態のコストをパラメータ  $B/4C$  によりコントロールできることを示した。これにより、ユーザが求める解を静止状態で得られる解探索システムを構築することが可能である。

次に、HC-ID ネットワークによる組合せ最適化問題解探索システムについて、より汎用性のあるシステムへと拡張した。まず HC-ID ネットワークを基に離散時間・2 値出力の高次結合ネットワークを導出し、より大きな規模の問題への適用が可能であることを示した。また特に離散時間 HC-ヒステリシスネットワークによる解探索では、ネットワークの更新法として非同期更新を用いることで、ネットワークパラメータの調節が不要になることを示した。次に実用的な問題の一つとして学位論文審査会スケジューリング問題を取り上げ、これを実装するために 4 次形式のエネルギー関数を拡張した。これにより、より複雑で実用的な問題の解探索を高次結合ネットワークを用いて行えることを示した。

最後に高次結合ネットワークのハードウェア実装を目指して、ニューロン素子の設計を行った。まず離散時間 HC-ヒステリシスネットワークの FPGA による実装を想定したニューロン素子を設計し、ソフトウェア解析により実装に必要な FPGA のリソースを明らかにした。高次シナプス結合は接合数が多く、そのまま回路に実装することは容易ではない。そこで積和演算の結果を順番に積算する機構を採用することで、比較的少ない FPGA リソースによる高次結合ネットワークの実装を実現した。またストカスティック論理を導入した離散時間 HC-ヒステリシスネットワークを提案した。ストカスティックノイズを導入することで、最適な  $B/4C$  のパラメータレンジが広がることを示した。

これらの研究成果により、神経回路網を用いた実用的でかつ汎用的な組合せ最適化問題の解探索システムを提案することができた。今後、本研究の成果を基に、組合せ最適化問題のニューラルネットワークによる実用的な解探索システムの実現が期待される。

## 付録 A エネルギー関数のパラメータ A の最適条件の導出

ここでは、式 (3.12) で示される 4 次形式のエネルギー関数について、第 1・2 項の拘束条件を満足しないような HC-ID ネットワークの状態を出力空間の頂点で不安定化するためのパラメータ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の条件を導出する。

今、ニューロンの発火個数を要請する拘束条件 (式 (3.12) の第 1 項・第 2 項) を満足しないネットワーク状態  $x$  が出力空間の頂点において安定であるとする。この時、ネットワーク内には以下の条件を少なくとも 1 つは満たすようなニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  が存在する。

$$\begin{aligned} \text{Case 1: } & \sum_u x_{u,\hat{i}} - 1 \geq 1 \quad \text{or} \quad \sum_i x_{\hat{u},i} - 1 \geq 1 \\ \text{Case 2: } & \sum_u x_{u,\hat{i}} - 1 = -1 \quad \text{or} \quad \sum_i x_{\hat{u},i} - 1 = -1 \end{aligned}$$

Case 1 の場合、ネットワーク上の列  $\hat{i}$  または行  $\hat{u}$  には過剰に発火しているニューロンが存在し、またニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  は発火ニューロンである。そのため、このニューロンは抑制を受けて非発火状態にならなければならない。一方、Case 2 の場合はネットワーク上の列  $\hat{i}$  または行  $\hat{u}$  において発火しているニューロンが存在しない。このためニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  は発火しなければならない非発火ニューロンである。またこの時、ニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\text{CH}}(x)}{\partial x_{\hat{u},\hat{i}}} = & A \left( \sum_u x_{u,\hat{i}} - 1 \right) + A \left( \sum_i x_{\hat{u},i} - 1 \right) \\ & + \sum_v \sum_j b_{\hat{u},vj} x_{v,j} \times \left\{ 2B \left( \frac{1}{2} - x_{\hat{u},\hat{i}} \right) + 4C \cdot c_{\text{sol}}(x) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

が成り立っている。これらの条件を基に、以下では Case 1・2 それぞれの場合の状態  $x$  を不安定化するためのパラメータ条件を導出する。

## A.1 全ての非解状態を不安定化する条件

まず,  $B$  や  $C$  の値がネットワークの安定性にもたらす影響を考慮せず, 全ての非解状態を不安定化する条件を導出する. なお, 導出にあたっては先行研究で示されている導出法 [15] を参考にした.

Case 1: 発火ニューロンが要請よりも多い場合

この場合, ニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  に対して以下が成り立つ.

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} \geq A + \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} \times \{-B + 4C \cdot c_{\text{sol}}(\mathbf{x})\} \quad (\text{A.2})$$

Case 1 の場合, 発火ニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  を不安定にするためには,  $\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x}) / \partial x_{\hat{u}, \hat{i}} > 0$  が成り立てばよい. そこでここでは,  $\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x}) / \partial x_{\hat{u}, \hat{i}}$  の下限値を見積もる. 式 (A.2) より,

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} > A - B \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} \quad (\text{A.3})$$

が成り立つ. ここで,  $\sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j}$  の上限値は

$$\sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} < m(n-1)b_{\text{max}} \quad (\text{A.4})$$

で見積もられる. 但し,  $n$  は問題サイズ,  $b_{\text{max}}$  はコスト行列  $b$  の成分の最大値,  $m$  は同行同列以外の発火ニューロンから受ける抑制の数を表す. したがって,  $\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x}) / \partial x_{\hat{u}, \hat{i}}$  の下限値は

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} > A - Bm(n-1)b_{\text{max}} \quad (\text{A.5})$$

で見積もられ, 状態  $\mathbf{x}$  を不安定化するための条件は以下のように導出される.

$$A > Bm(n-1)b_{\text{max}} \quad (\text{A.6})$$

Case 2: 発火ニューロンが要請よりも少ない場合

Case 2 の場合のパラメータ条件を導出するにあたり, Case 1 で導出された条件式 (A.6) が成り立っていることを仮定する. この時, Case 2 を満たす状態のネットワークには列  $\hat{i}$  ・ 行  $\hat{u}$  の双方に発火ニューロンが1つもいない非発火ニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  が必ず存在して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} &= -2A + \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} \times \left\{ B + 4Cc(\mathbf{x}) \right\} \\ &= -2A + 4C \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} \times \left\{ \frac{B}{4C} + c_{\text{sol}}(\mathbf{x}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

が成り立つ．Case 2 の場合，非発火ニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  を不安定にするためには， $\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})/\partial x_{\hat{u}, \hat{i}} < 0$  が成り立てばよい．そこでここでは， $\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})/\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}$  の上限値を見積もる．式 (A.7) の右辺のうち， $\sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j}$  の上限値は

$$\sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} < m b_{\max} \quad (\text{A.8})$$

となる．これは，今各行各列の発火ニューロンは最大でも 1 つしか存在しないため導かれる．また  $c_{\text{sol}}(\mathbf{x})$  の上限値については，

$$\begin{aligned} c_{\text{sol}} &= \frac{1}{2} \sum_u \sum_i \sum_v \sum_j b_{ui, vj} x_{u,i} x_{v,j} \\ &< \frac{1}{2} \left\{ m(m-1) + ((n-1)-m)m \right\} b_{\max} \\ &= m(n-2)b_{\max} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

と見積もられる．これは，今ネットワーク中の  $m$  個の発火ニューロンが  $m-1$  個の発火ニューロンから抑制を受け，残りの  $(n-1)-m$  個の発火ニューロンが  $m$  個の発火ニューロンからの抑制を受け取るためである．式 (A.8)，式 (A.9) より， $\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})/\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}$  の上限値は

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} < -2A + m \cdot b_{\max} \left\{ B + 2C \cdot m(n-2)b_{\max} \right\} \quad (\text{A.10})$$

で見積もられ，状態  $\mathbf{x}$  を不安定化するための条件は以下のように導出される．

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} > A > \frac{m}{2} b_{\max} \left\{ B + 2C \cdot m(n-2)b_{\max} \right\} \quad (\text{A.11})$$

したがって式 (A.6)・(A.11) より，全ての非解状態を不安定化するための条件 (式 (3.18)) が得られる．

## A.2 パラメータ $A$ 以外の影響を考慮した条件の導出

次に， $B$  や  $C$  の値に考慮した場合について考える．今，ニューロンの発火個数を要請する拘束条件を満足しないネットワーク状態  $\mathbf{x}$  に対して，以下が成り立つ．

$$\frac{B}{4C} \geq c_{\text{sol}}(\mathbf{x}) > 0 \quad (\text{A.12})$$

これは式 (3.20) より， $c_{\text{sol}}(\mathbf{x}) < B/4C$  が成り立つ場合，状態  $\mathbf{x}$  は安定で存在できないためである．このような条件下で，Case 1・2 それぞれについて状態を不安定化するための条件を考える．

**Case 1: 発火ニューロンが要請よりも多い場合**

この場合，式 (A.3) より，ニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  に対して以下が成り立つ．

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} > A - B \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} \quad (\text{A.13})$$

ここで発火ニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  を不安定化するためには,  $\partial E_{\text{CH}}(x)/\partial x_{\hat{u}, \hat{i}} > 0$  が成り立つ必要がある．したがって,  $A$  の条件は

$$A > B \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} \quad (\text{A.14})$$

となる．さらに式 (A.12) より,  $2 \cdot B/4C > 2c_{\text{sol}}((x)) = \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j}$  が成り立つ．これより, 状態  $x$  を不安定化するための条件は以下のように求まる．

$$A > \frac{B^2}{4C} \quad (\text{A.15})$$

#### Case 2: 発火ニューロンが要請よりも少ない場合

Case 2 の場合のパラメータ条件を導出するにあたり, Case 1 で導出された条件式 (A.6) が成り立っていることを仮定する．この時, Case 2 を満たす状態のネットワークには列  $\hat{i}$  ・ 行  $\hat{u}$  の双方に発火ニューロンが1つもない非発火ニューロン  $(\hat{u}, \hat{i})$  が必ず存在し, 式 (A.7) より

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}(x)}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} = -2A + 4C \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} \times \left\{ \frac{B}{4C} + c_{\text{sol}}(x) \right\} \quad (\text{A.16})$$

が成り立つ．ここで前節と同様に  $\partial E_{\text{CH}}(x)/\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}$  の上限値を見積もると, 式 (A.12) より以下の式が導出される．

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}(x)}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} < -2A + 4C \sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} \times 2 \cdot \frac{B}{4C}. \quad (\text{A.17})$$

さらに Case 2 において,  $\sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j}$  の上限値は以下の式で与えられる．

$$\sum_v \sum_j b_{\hat{u}\hat{i}, vj} x_{v,j} < m \cdot b_{\text{max}} \quad (\text{A.18})$$

したがって  $\partial E_{\text{CH}}(x)/\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}$  の上限値は

$$\frac{\partial E_{\text{CH}}(x)}{\partial x_{\hat{u}, \hat{i}}} < -2A + 4C \cdot b_{\text{max}} \cdot m \times 2 \cdot \frac{B}{4C} \quad (\text{A.19})$$

で見積もられ, 状態  $x$  を不安定化するための条件は以下のように導出される．

$$A > B \cdot m \cdot b_{\text{max}} \quad (\text{A.20})$$

したがって式 (A.15) ・ (A.20) より, パラメータ  $B, C$  の値に考慮した, 非解状態を不安定化するための条件 (式 (5.5)) が得られる．

## 付録 B 4 次形式のエネルギー関数による荷重値行列の算出

ここでは、式 (3.12) に示す 4 次形式のエネルギー関数を実装するための、荷重値行列の算出法について述べる。HC-ID ネットワークにエネルギー関数  $E_{CH}$  を適用するには、ネットワーク内の全てのニューロンに対してポテンシャル  $U_{HC-ID}$  の偏微分と  $E_{CH}$  の偏微分が一致するように荷重値行列を決定する必要がある。まず 4 次形式のエネルギー関数  $E_{CH}$  の  $x_{\hat{u},\hat{i}}$  に関する偏微分は、式 (3.17) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{CH}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u},\hat{i}}} = & A \left( 2x_{\hat{u},\hat{i}} + \sum_{u \neq \hat{u}}^n x_{u,\hat{i}} + \sum_{i \neq \hat{i}}^n x_{\hat{u},i} - 2 \right) + B \sum_{v \neq \hat{u}}^n \sum_{j \neq \hat{i}}^n \left( b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{v,j} - 2b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{\hat{u},\hat{i}} x_{v,j}^2 \right) \\ & + C \left( 2 \sum_{v \neq \hat{u}}^n \sum_{j \neq \hat{i}}^n b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{\hat{u},\hat{i}} x_{v,j} + \sum_{u \neq \hat{u}}^n \sum_{i \neq \hat{i}}^n \sum_{v \neq \hat{u}}^n \sum_{j \neq \hat{i}}^n b_{ui,vj} x_{u,i} x_{v,j} \right) \times 2 \sum_{v \neq \hat{u}}^n \sum_{j \neq \hat{i}}^n b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{v,j} \end{aligned} \quad (B.1)$$

で表される。さらにこの式を  $x$  の次数に注目して整理すると、以下が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{CH}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{u},\hat{i}}} = & -2Bx_{\hat{u},\hat{i}} \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{v,j}^2 + 4Cx_{\hat{u},\hat{i}} \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{k \neq \hat{i}} b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{v,j} b_{\hat{u}\hat{i},zk} x_{v,j} x_{z,k} \\ & + 2C \sum_{u \neq \hat{u}} \sum_{i \neq \hat{i}} \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{k \neq \hat{i}} b_{ui,vj} b_{\hat{u}\hat{i},zk} x_{u,i} x_{v,j} x_{z,k} + 2Ax_{\hat{u},\hat{i}} + B \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq \hat{i}} b_{\hat{u}\hat{i},vj} x_{v,j} \\ & + A \sum_{u \neq \hat{u}} x_{u,\hat{i}} + A \sum_{i \neq \hat{i}} x_{\hat{u},i} - 2A \end{aligned} \quad (B.2)$$

ただし、適意インデックスの置き換えを行っている。式 (B.2) より、 $E_{CH}$  をニューラルネットワークに実装するためには 3 次・1 次のシナプス結合が必要であることが分かる。

また HC-ID ネットワークのポテンシャル  $U_{HC-ID}$  は式 (3.5) より以下で表される。

$$\begin{aligned} \tau_u \cdot U_{HC-ID}(\mathbf{x}) = & -\frac{1}{4} \sum_i^N \sum_j^N \sum_k^N \sum_l^N w_{ijkl} x_i x_j x_k x_l - \frac{1}{3} \sum_i^N \sum_j^N \sum_k^N w_{ijk} x_i x_j x_k \\ & - \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N w_{ij} x_i x_j - \sum_i^N h_i x_i \end{aligned} \quad (B.3)$$



ただし、式 (B.3) ではニューロンのインデックスが 1 次元であることに注意する。ここで、あるニューロン  $\hat{i}$  について、 $x_{\hat{i}}$  に関する項とそれ以外の項を分離すると、

$$\begin{aligned} \tau_u \cdot U_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x}) = & -\frac{1}{4} \left( w_{\hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{i}} x_{\hat{i}}^4 + 4 \sum_{j \neq \hat{i}} w_{\hat{i}\hat{i}\hat{i}j} x_{\hat{i}}^3 x_j + 6 \sum_{j \neq \hat{i}} w_{\hat{i}\hat{i}jj} x_{\hat{i}}^2 x_j^2 \right. \\ & + 12 \sum_{j \neq \hat{i}} \sum_{k > j} w_{\hat{i}\hat{i}jk} x_{\hat{i}}^2 x_j x_k + 24 \sum_{j \neq \hat{i}} \sum_{k > j} \sum_{l > k} w_{\hat{i}jkl} x_{\hat{i}} x_j x_k x_l \\ & \left. + \sum_{i \neq \hat{i}} \sum_{j \neq \hat{i}} \sum_{k \neq \hat{i}} \sum_{l \neq \hat{i}} w_{ijkl} x_i x_j x_k x_l \right) \\ & - \frac{1}{2} \left( w_{\hat{i}\hat{i}} x_{\hat{i}}^2 + 2 \sum_{j \neq \hat{i}} w_{\hat{i}j} x_{\hat{i}} x_j + \sum_{i \neq \hat{i}} \sum_{j \neq \hat{i}} w_{ij} x_i x_j \right) - \left( h_{\hat{i}} x_{\hat{i}} + \sum_{i \neq \hat{i}} h_i x_i \right) \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

となる。ただし  $E_{\text{CH}}$  には 2 次のシナプス結合が含まれないことから、式 (B.4) についても 2 次の項を省略している。これより  $U_{\text{HC-ID}}$  の  $x_{\hat{i}}$  に関する偏微分をとると、以下が得られる。

$$\begin{aligned} \tau_u \cdot \frac{\partial U_{\text{HC-ID}}(\mathbf{x})}{\partial x_{\hat{i}}} = & -w_{\hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{i}} x_{\hat{i}}^3 - \frac{1}{3} \sum_{j \neq \hat{i}} w_{\hat{i}\hat{i}\hat{i}j} x_{\hat{i}}^2 x_j - 3 \sum_{j \neq \hat{i}} w_{\hat{i}\hat{i}jj} x_{\hat{i}} x_j^2 - 6 \sum_{j \neq \hat{i}} \sum_{k > j} w_{\hat{i}\hat{i}jk} x_{\hat{i}} x_j x_k \\ & - 6 \sum_{j \neq \hat{i}} \sum_{k > j} \sum_{l > k} w_{\hat{i}jkl} x_j x_k x_l - w_{\hat{i}\hat{i}} x_{\hat{i}} - \sum_{j \neq \hat{i}} w_{\hat{i}j} x_j - h_{\hat{i}} \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

したがって式 (B.2) と (B.5) を比較することで、荷重値およびバイアス値は以下のように決定される。

- $w_{\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{i}} = w_{\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{i},v\hat{j}} = 0$
- $w_{\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{i},v\hat{j},v\hat{j}} = 2B/3 \cdot b_{\hat{u}\hat{i},v\hat{j}}$
- $w_{\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{i},v\hat{j},z\hat{k}} = -2C/3 \cdot 2b_{\hat{u}\hat{i},v\hat{j}} b_{\hat{u}\hat{i},z\hat{k}}$
- $w_{\hat{u}\hat{i},v\hat{j},z\hat{k},y\hat{l}} = -C/3 \cdot 2(b_{\hat{u}\hat{i},v\hat{j}} b_{z\hat{k},y\hat{l}} + b_{\hat{u}\hat{i},z\hat{k}} b_{v\hat{j},y\hat{l}} + b_{\hat{u}\hat{i},y\hat{l}} b_{v\hat{j},z\hat{k}})$
- $w_{\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{i}} = -2A$
- $w_{\hat{u}\hat{i},v\hat{j}} = -Bb_{\hat{u}\hat{i},v\hat{j}}$
- $w_{\hat{u}\hat{i},\hat{u}\hat{j}} = w_{\hat{u}\hat{i},v\hat{i}} = -A$
- $h_{\hat{u}\hat{i}} = 2A$

ただしインデックスに関して  $1 \leq \hat{u}, v, z, y, \hat{i}, j, k, l \leq n$ ,  $\hat{u} \neq v \neq z \neq y$ ,  $\hat{i} \neq j \neq k \neq l$  が成り立つとする。また荷重値は回転対称であり、 $w_{ui,vj,zk,yl} = w_{ui,vj,yl,zk} = w_{ui,yl,zk,vj} = \dots$  が成り立つものとする。これらの規則を整理すると、荷重値は以下の式で得られる。

$$\begin{aligned} w_{ui,vj,zk,yl} = & \delta(ui, vj) \cdot \delta(zk, yl) \cdot (1 - \delta(ui, zk)) \frac{2}{3} B b_{ui,zk} \\ & - (1 - \delta(ui, zk)) \cdot (1 - \delta(ui, yl)) \cdot (1 - \delta(vj, yl)) \\ & \times \frac{2}{3} C (b_{ui,vj} b_{zk,yl} + b_{ui,zk} b_{vj,yl} + b_{ui,yl} b_{vj,zk}) \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

$$w_{ui,vj} = -B b_{ui,vj} - \delta(u, v) A - \delta(i, j) A \quad (\text{B.7})$$

$$h_{ui} = 2A \quad (\text{B.8})$$

ただし, インデックスに関して  $1 \leq ui \leq vj \leq zk \leq yl \leq N$  が成り立つとする. また  $\delta$  は Kronecker のデルタ関数であり, 以下が成り立つ.

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{if } a = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

これらの荷重値計算則を用いることで, 4 次形式のエネルギー関数を HC-ID ネットワークに適用することができる.



## 付録 C $\beta$ が有限値をとる場合のエネルギー関数の偏微分値の見積もり

ここでは  $g$  関数のパラメータ  $\beta$  が有限値を取る場合について、 $E_{CH}$  のニューロン出力に関する偏微分値を見積もる。今、ネットワーク状態が解状態であるとき、ある発火ニューロン ( $\hat{u}, F[\hat{u}]$ ) に関する  $E_{CH}$  の偏微分値は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{CH}}{\partial x_{\hat{u}, F[\hat{u}]}} &= A \left( \sum_v x_{v, F[\hat{u}]} - 1 \right) + A \left( \sum_i x_{\hat{u}, i} - 1 \right) \quad \cdots \textcircled{1} \\ &+ 2B \sum_v \sum_j b_{\hat{u}F[\hat{u}], vj} x_{v, j} \left( \frac{1}{2} - x_{\hat{u}, F[\hat{u}]} x_{yj} \right) \quad \cdots \textcircled{2} \\ &+ 2C \sum_z \sum_k \sum_y \sum_l b_{zk, yl} x_{z, k} x_{y, l} \times \sum_v \sum_j b_{\hat{u}F[\hat{u}], vj} x_{v, j} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned} \quad (C.1)$$

ここで  $x_{\hat{u}, F[\hat{u}]}$  を式 (3.22) に従い、 $\xi$  を用いて表示することを考える。この時、式 (C.1) の①～③の各項についてそれぞれ計算を行う。なお以下の計算では、コスト行列  $b$  の成分について以下が成り立つと仮定する。

- (1)  $b_{ui, vj} = b_{vj, ui}$
- (2)  $b_{ui, ui} = 0$
- (3)  $b_{ui, vi} = 0, b_{ui, uj} = 0$

まず①項は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= A \left( (1 - \xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]}) + \sum_{v \neq \hat{u}} \xi_{v, F[\hat{u}]} - 1 \right) + A \left( (1 - \xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]}) + \sum_{i \neq F[\hat{u}]} \xi_{\hat{u}, i} - 1 \right) \\ &= -2A\xi_{\hat{u}, F[\hat{u}]} + A \left( \sum_{v \neq \hat{u}} \xi_{v, F[\hat{u}]} + \sum_{i \neq F[\hat{u}]} \xi_{\hat{u}, i} \right) \end{aligned} \quad (C.2)$$

また②項は以下のように計算される .

$$\begin{aligned}
② &= -2B \sum_y \sum_j b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[j]} x_{v,j} \left( x_{\hat{u},F[\hat{u}]} x_{v,j} - \frac{1}{2} \right) \\
&= -2B \left[ \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left\{ (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) (1 - \xi_{vF[v]})^2 - \frac{1}{2} (1 - \xi_{vF[v]}) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],v,j} \left\{ (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) \xi_{v,j}^2 - \frac{1}{2} \xi_{v,j} \right\} \right] \\
&= -2B \left[ \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left\{ (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) (1 - 2\xi_{v,F[v]} + \xi_{v,F[v]}^2) - \frac{1}{2} (1 - \xi_{v,F[v]}) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq F[\hat{u}]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],v,j} \left\{ (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) \xi_{v,j}^2 - \frac{1}{2} \xi_{v,j} \right\} \right] \tag{C.3}
\end{aligned}$$

ここで  $\xi^2 \cdot \xi^3$  は十分に小さいので,  $\xi$  について線型近似をとると,

$$\begin{aligned}
② &\approx -2B \left[ \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left\{ 1 - 2\xi_{v,F[v]} - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} - \frac{1}{2} (1 - \xi_{v,F[v]}) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],v,j} \xi_{v,j} \right] \\
&= -2B \left[ \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \xi_{v,F[v]} - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} \right\} - \frac{1}{2} \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],v,j} \xi_{v,j} \right] \\
&= B \sum_{v \neq \hat{u}} \left[ b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \{-1 + 3\xi_{v,F[v]} + 2\xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} \} + \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],v,j} \xi_{v,j} \right] \tag{C.4}
\end{aligned}$$

最後に③項は以下のように計算される .

$$\begin{aligned}
③ &= 2C \left[ \sum_{y \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],yF[y]} (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) (1 - \xi_{y,F[y]}) + \sum_{y \neq \hat{u}} \sum_{l \neq F[y]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],y,l} (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) \xi_{y,l} \right. \\
&\quad + \sum_{z \neq \hat{u}} b_{zF[z],\hat{u}F[\hat{u}]} (1 - \xi_{z,F[z]}) (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{k \neq F[z]} b_{zk,\hat{u}F[\hat{u}]} \xi_{z,k} (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) \\
&\quad + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq z} b_{zF[z],yF[y]} (1 - \xi_{z,F[z]}) (1 - \xi_{y,F[y]}) \\
&\quad + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq z} \sum_{l \neq F[y]} b_{zF[z],y,l} (1 - \xi_{z,F[z]}) \xi_{y,l} + \sum_{y \neq \hat{u}} \sum_{z \neq y} \sum_{k \neq F[z]} b_{zk,yF[y]} \xi_{z,k} (1 - \xi_{y,F[y]}) \\
&\quad \left. + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{k \neq F[z]} \sum_{y \neq z} \sum_{l \neq F[y]} b_{zk,y,l} \xi_{z,k} \xi_{y,l} \right] \\
&\quad \times \left[ \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} (1 - \xi_{v,F[v]}) + \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],v,j} \xi_{v,j} \right] \tag{C.5}
\end{aligned}$$

ここで  $b_{ui,vj} = b_{vj,ui}$  が成り立つので ,

$$\begin{aligned}
 ③ = & 2C \left[ 2 \sum_{y \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],yF[y]} (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) (1 - \xi_{y,F[y]}) + 2 \sum_{y \neq \hat{u}} \sum_{l \neq F[y]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],yl} (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]}) \xi_{y,l} \right. \\
 & + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq z} b_{zF[z],yF[y]} (1 - \xi_{z,F[z]}) (1 - \xi_{y,F[y]}) + 2 \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq z} \sum_{l \neq F[y]} b_{zF[z],yl} (1 - \xi_{z,F[z]}) \xi_{y,l} \\
 & \left. + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{k \neq F[z]} \sum_{y \neq z} \sum_{l \neq F[y]} b_{zk,yl} \xi_{z,k} \xi_{y,l} \right] \times \left[ \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} (1 - \xi_{v,F[v]}) + \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vj} \xi_{v,j} \right] \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

が得られる . さらに②項と同様に  $\xi$  について線形近似をとると , ③項は以下のように計算される .

$$\begin{aligned}
 ③ \approx & 2C \left[ 2 \sum_{z \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} - \xi_{z,F[z]}) + 2 \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{k \neq F[z]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],zk} \xi_{z,k} \right. \\
 & + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq z} b_{zF[z],yF[y]} (1 - \xi_{z,F[z]} - \xi_{y,F[y]}) + 2 \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{v \neq z} \sum_{l \neq F[y]} b_{zF[z],yl} \xi_{y,l} \left. \right] \\
 & \times \left[ \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} (1 - \xi_{v,F[v]}) + \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vj} \xi_{v,j} \right] \\
 \approx & 2C \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \times \left[ 2 \sum_{z \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} - \xi_{z,F[z]}) + 2 \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{k \neq F[z]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],zk} \xi_{z,k} \right. \\
 & + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq z} b_{zF[z],yF[y]} (1 - \xi_{z,F[z]} - \xi_{y,F[y]}) + 2 \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq z} \sum_{l \neq F[y]} b_{zF[z],yl} \xi_{y,l} \left. \right] \\
 & + 2C \left[ 2 \sum_{y \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],F[y]} + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq z} b_{zF[z],yF[y]} \right] \\
 & \times \left[ - \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u},F[\hat{u}],vF[v]} \xi_{v,F[v]} + \sum_{v \neq \hat{u}} \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vj} \xi_{v,j} \right] \\
 = & 2C \sum_{v \neq \hat{u}} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \times \left[ \sum_{z \neq \hat{u}} \left\{ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} (1 - \xi_{\hat{u},F[\hat{u}]} - \xi_{z,F[z]}) + 2 \sum_{k \neq F[z]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],zk} \xi_{z,k} \right\} \right. \\
 & + \sum_{z \neq \hat{u}} \sum_{y \neq \hat{u}} \left\{ b_{zF[z],yF[y]} (1 - 2\xi_{z,F[z]}) + 2 \sum_{l \neq F[y]} b_{zF[z],yl} \xi_{y,l} \right\} \left. \right] \\
 & + 2C \sum_{v \neq \hat{u}} \left[ -b_{\hat{u}F[\hat{u}],vF[v]} \xi_{v,F[v]} + \sum_{j \neq F[v]} b_{\hat{u}F[\hat{u}],vj} \xi_{v,j} \right] \times \sum_{z \neq \hat{u}} \left[ 2b_{\hat{u}F[\hat{u}],zF[z]} + \sum_{y \neq \hat{u}} b_{zF[z],yF[y]} \right] \quad (C.7)
 \end{aligned}$$

したがって式 (C.2) , (C.4) , (C.7) より , 式 (3.23) が得られる .



# 謝辞

本研究を行うにあたり、多くの方々にご指導、ご助言を頂きました。

指導教官である中島康治教授には、研究内容から研究の発表に至るまで、研究全般においてご指導を頂き、また研究の方向性や研究内容に関して、興味深い議論とご助言を頂きました。

中尾光之教授、石黒章夫教授には、本研究をまとめるにあたり、貴重なご助言と議論を頂きました。

佐藤茂雄准教授には、研究を進めるにあたり折々で客観的な視点に立ったご助言と議論を頂き、また論文作成など研究をまとめる上でご指導を頂きました。

小野美武助教には、研究内容に関して鋭い質問と、貴重な議論を頂きました。

仙台高等専門学校の早川吉弘准教授には、東北大学在籍中、研究内容の議論から実際の研究の進め方、研究内容のまとめ方や発表方法まで、研究の全ての面においてきめ細かいご指導を頂きました。また東北大学を離れられた後も、研究内容に関して貴重な議論とご助言を頂きました。

末永晋也氏、千承佑氏、Johan Sveholm 氏、佐藤朱里氏、永嶋宏和氏には、本研究を進めるための基本的な知識やノウハウをご指導いただき、また貴重なご助言を頂きました。

Ali Lemus 氏、押切智子氏、黒瀬幸司氏、坪井大樹氏、松井孝輔氏には、研究に関する貴重なご意見を頂くと共に、研究以外の面でもたいへんお世話になりました。

中島研究室の皆様には、研究生活において、たくさんのご協力を頂きました。

こうしたご指導、ご支援を頂いたことに深く感謝いたします。

最後に、これまで様々な面で支えとなり、また見守ってくれた両親、家族、友人そして卒業を心待ちにしてくれた祖父に深く感謝いたします。





# 本研究に関する発表

## 投稿論文

1. T. Sota, Y. Hayakawa, S. Sato, and K. Nakajima, “An application of higher order connection to inverse function delayed network,” Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, vol.2, no.2, pp.180–197, 2011.
2. T. Sota, Y. Hayakawa, S. Sato, and K. Nakajima, “Modification of inverse function delayed network with higher-order connections for hardware implementation” (近日投稿予定)

## 国際会議での発表

1. T. Sota, Y. Hayakawa, and K. Nakajima, “ID model with higher-order connections for the traveling salesman problem,” Proc. NOLTA’08, pp.548–551, 2008.
2. T. Sota, Y. Hayakawa, and K. Nakajima, “The quartic form energy function for general combinatorial optimization problems,” Proc. NOLTA’09, pp.527–530, 2009.
3. T. Sota, Y. Hayakawa, S. Sato, and K. Nakajima, “Discrete higher order inverse function delayed network,” Proc. NOLTA’10, pp.615–618, 2010.
4. K. Kurose, T. Sota, Y. Hayakawa, S. Sato, and K. Nakajima, “Analyses of Coupled Hindmarsh-Rose Type Bursting Oscillators,” Proc. NOLTA’10, pp.619–622, 2010.
5. T. Sota, Y. Hayakawa, S. Sato, and K. Nakajima, “Method of Solving Combinatorial Optimization Problems with Stochastic Effects,” Proc. ICONIP’11, pp.389–394, 2011.
6. T. Sota, Y. Hayakawa, and K. Nakajima, “Solving combinatorial optimization problems with the quartic form energy function of the neural network,” Proceedings of the 2nd Student Organizing International Mini-Conference on Information Electronics Systems, p.69, 2009.
7. T. Sota, Y. Hayakawa, S. Sato, and K. Nakajima, “Discrete higher order connection neural network for solving optimization problems,” Proceedings of the 3rd Student Organizing International Mini-Conference on Information Electronics Systems, p.141, 2010.

## 国内学会・研究会での発表

1. 曾田尚宏, 早川吉弘, 中島康治, “巡回セールスマン問題のための逆関数遅延ネットワーク,” ニューロコンピューティング研究会 信学技報 (2007-11), pp.56–70, 2007.
2. 曾田尚宏, 早川吉弘, 中島康治, “ID モデルによる動的解表現の QAP 解探索への適用,” ニューロコンピューティング研究会 信学技報 (2008-3), pp.349–354, 2008.
3. 曾田尚宏, 早川吉弘, 中島康治, “高次逆関数遅延モデル,” 非線形問題研究会 信学技報 (2008-10), pp.35–40, 2008.
4. 曾田尚宏, 早川吉弘, 中島康治, “高次シナプス結合ニューラルネットワークによる組み合わせ最適化問題解探索,” 2009 年電子情報通信学会総合大会講演論文集, p.79, 2009.
5. 曾田尚宏, 早川吉弘, 中島康治, “非線形自己結合を持つ逆関数遅延ニューラルネットワーク,” 日本神経回路学会第 19 回全国大会講演論文集, pp.52–53, 2009.
6. 曾田尚宏, 黒瀬幸司, 早川吉弘, 佐藤茂雄, 中島康治, “離散時間高次結合逆関数遅延ネットワーク,” 非線形問題研究会 信学技報 (2010-3), pp.131–136, 2010.
7. 曾田尚宏, 黒瀬幸司, 早川吉弘, 佐藤茂雄, 中島康治, “高次結合ネットワークによる組み合わせ最適化問題解探索のパラメータ特性,” 2010 年電子通信学会総合大会講演論文集, p.45, 2010.
8. 曾田尚宏, 早川吉弘, 佐藤茂雄, 中島康治, “4 次形式のエネルギー関数に基づく組み合わせ最適化問題解探索法 – より大規模な問題への適用を目指して –,” 非線形問題研究会 信学技報 (2010-11), pp.11–16, 2010.
9. 曾田尚宏, 早川吉弘, 佐藤茂雄, 中島康治, “ストカスティック論理による高次結合ニューラルネットワーク,” 非線形問題研究会 信学技報 (2011-3), pp.149–189, 2011.

## 参考文献

- [1] 国際電気通信基礎技術研究所（編）. ニューラルネットワーク応用, 2. ニューラルネットとコンピュータ, pp. 15–26. 先端テクノロジーシリーズ. オーム社, 1995.
- [2] Sadiq M. Sait and Habib Youssef. 組合せ最適化アルゴリズムの最新手法: 基礎から工学応用まで. 丸善, 2002.
- [3] K. Aihara, T. Takabe, and M. Toyoda. Chaotic neural networks. *Physics Lett. A*, Vol. 144, No. 6,7, pp. 333–340, 1990.
- [4] L. Chen and K. Aihara. Chaotic simulated annealing by a neural network model with transients chaos. *Neural Netw.*, Vol. 8, No. 6, pp. 915–930, 1995.
- [5] T. Nakaguchi, K. Jin’no, and M. Tanaka. Hysteresis neural networks for n-queen problems. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E82-A, No. 9, pp. 1851–1859, 1999.
- [6] K. Nakajima and Y. Hayakawa. Characteristics of inverse function delayed model for neural computation. *Proc. NOLTA’02*, pp. 861–864, Oct. 2002.
- [7] S. Suenaga, Y. Hayakawa, and K. Nakajima. Design of a neural network chip for the burst ID model with ability of burst firing. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E90-A, No. 4, pp. 715–723, 2007.
- [8] P. Baldi and A. F. Atiya. How delays affect neural dynamics and learning. *IEEE Trans. Neural Netw.*, Vol. 5, No. 4, pp. 612–621, Jul. 1994.
- [9] 末永晋也. 高次ダイナミクスの導入による高機能集積化神経回路網の研究. PhD thesis, 東北大学大学院 情報科学研究科, 2006.
- [10] T. Samad and P. Harper. High-order Hopfield and Tank optimization networks. *Parallel Computing*, Vol. 16, No. 2-3, pp. 287–292, 1990.
- [11] Y. Hayakawa and K. Nakajima. Design of the inverse function delayed neural network for solving combinatorial optimization problems. *IEEE Trans. Neural Netw.*, Vol. 21, No. 2, pp. 224–237, 2010.
- [12] H. Li, Y. Hayakawa, and K. Nakajima. Retrieval property of associative memory based on inverse function delayed neural networks. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E88-A, No. 8, pp. 2192–2199, 2005.
- [13] 福原淳. 集積化逆関数遅延ニューロモデルの学習性能に関する研究. Master’s thesis, 東北大学大学院 情報科学研究科, 2005.

- [14] Y. Hayakawa, T. Denda, and K. Nakajima. Inverse function delayed model for optimization problems. In *Proc. KES'04 Part 1*, pp. 981–987, 2004.
- [15] S. Matsuda. “Optimal” neural representation of higher order for traveling salesman problems. *Electronics and Communications in Japan, Part 2*, Vol. 85, No. 9, pp. 32–42, 2002.
- [16] 中野馨, et al. ニューロコンピュータの基礎. コロナ社, 1990.
- [17] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology-London*, Vol. 117, No. 4, pp. 500–544, 1952.
- [18] R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.*, Vol. 1, pp. 445–446, 1961.
- [19] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, Vol. 50, pp. 2061–2070, 1962.
- [20] J. J. Hopfield and D. W. Tank. “Neural” computation of decisions in optimal problems. *Biol. Cybern.*, Vol. 52, pp. 141–152, 1985.
- [21] 柳浦睦憲, 茨木俊秀. 組合せ最適化: メタ戦略を中心として. 経営科学のニューフロンティア. 朝倉書店, 2001.
- [22] G. Feng and C. Douligeris. On the convergence and parameter relation of discrete-time continuous-state Hopfield networks with self-interaction neurons. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E84-A, No. 12, pp. 3162–3173, 2001.
- [23] 森光司. 大規模カオスニューロコンピュータの二次割り当て問題への応用. Master’s thesis, 東京電機大学大学院 工学研究科, 2004.
- [24] A. Sato, Y. Hayakawa, and K. Nakajima. Avoidance of the permanent oscillating state in the inverse function delayed neural network. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E90-A, No. 10, pp. 2101–2107, 2007.
- [25] 佐藤朱里. 逆関数遅延モデルによる最適化問題処理ニューロシステムの設計に関する研究. Master’s thesis, 東北大学大学院 情報科学研究科, 2007.
- [26] 曾田尚宏. 高次結合及び能動化ニューラルネットワークを用いた組合せ最適化システムに関する研究. Master’s thesis, 東北大学大学院 情報科学研究科, 2009.
- [27] Hongge Li, Yoshihiro Hayakawa, Shigeo Sato, and Koji Nakajima. Hardware implementation of an Inverse function Delayed neural network using stochastic logic. *IEICE Trans. Inf. and Syst.*, Vol. E89-D, No. 9, pp. 2572–2578, 2006.
- [28] Y. Kondo and Y. Sawada. Functional abilities of a stochastic logic neural network. *IEEE Trans. Neural Netw.*, Vol. 3, No. 3, pp. 434–443, 1992.
- [29] 桃井昭好, 佐藤茂雄, 中島康治. ストカスティックロジックを用いた 1000 ニューロンハードウェアシステムの構築及びその応用. ニューロコンピューティング研究会 信学技報 (2004-82), pp. 37–42, 2004.
- [30] 宮川博義, 井上雅司. ニューロンの生物物理. 丸善, 2003.
- [31] M. Naganuma and T. Yanaru. On the stability of lagrange programming neural networks

- 
- for satisfiability problems of propositional calculus. *Neurocomputing* 13, pp. 119–133, 1996.
- [32] 合原一幸. カオス — カオス理論の基礎と応用 —. Information & Computing. サイエンス社, 1990.
- [33] 松本隆, 徳永隆治, 宮野尚哉, 徳田功. カオスと時系列. 情報数理シリーズ. 培風館, 2002.
- [34] 永嶋宏和, 早川吉弘, 中島康治. 離散時間モデルを用いた最適化問題. 信学技報, Vol. NLP2005-6, pp. 29–34, 2005.
- [35] 佐藤朱里, 早川吉弘, 中島康治. Inverse function delayed モデルによる組合せ最適化問題正解率のパラメータ依存性. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J89-A, No. 11, pp. 960–972, 2006.
- [36] 池上敦子, 繁野麻衣子. 質の高いサービスを提供するためのスタッフスケジューリング. 電子情報通信学会誌, Vol. 94, No. 9, pp. 760–766, 2011.
- [37] 阿曾弘具. コンピュータの基礎 — デジタル世界の原理を学ぶ —. 昭晃堂, 2004.

# 索引

あ	
遺伝的アルゴリズム	14
HDL	57
N-Queen 問題	16
エネルギー関数	7
ID ネットワークの—	12
問題を記述する—	15
4 次形式の—	19
FPGA	57
か	
解状態	15
解のコスト	13
カオス	38
カオスニューラルネットワーク	9
学位審査会スケジューリング問題	48
活性化関数	7
逆関数遅延ネットワーク	9, 10
極小値問題	9
近似アルゴリズム	14
組合せ最適化問題	13
高次結合逆関数遅延ネットワーク	24
高次結合ヒステリシスネットワーク	44
高次結合 Hopfield ネットワーク	19
高次シナプス結合	23
さ	
最適解	13
$g$ 関数	10
シナプス前抑制	23
シミュレーテッドアニーリング	14
巡回セールスマン問題	16
神経細胞	5
審査枠	49
ストカスティック論理	20
ストレンジアトラクタ	38
た	
タブーサーチ	14
遅延座標	38
遅延座標系埋め込み法	38
動的解表現	19
な	
2 次割り当て問題	16
ニューロンモデル	6
は	
発火状態	15
Fitzhugh-Nagumo 方程式	6
負性抵抗領域	11
Hodgkin-Huxley 方程式	6

Hopfield ネットワーク	7
Hopfield モデル	7
ら	
離散時間 HC-ID モデル	42